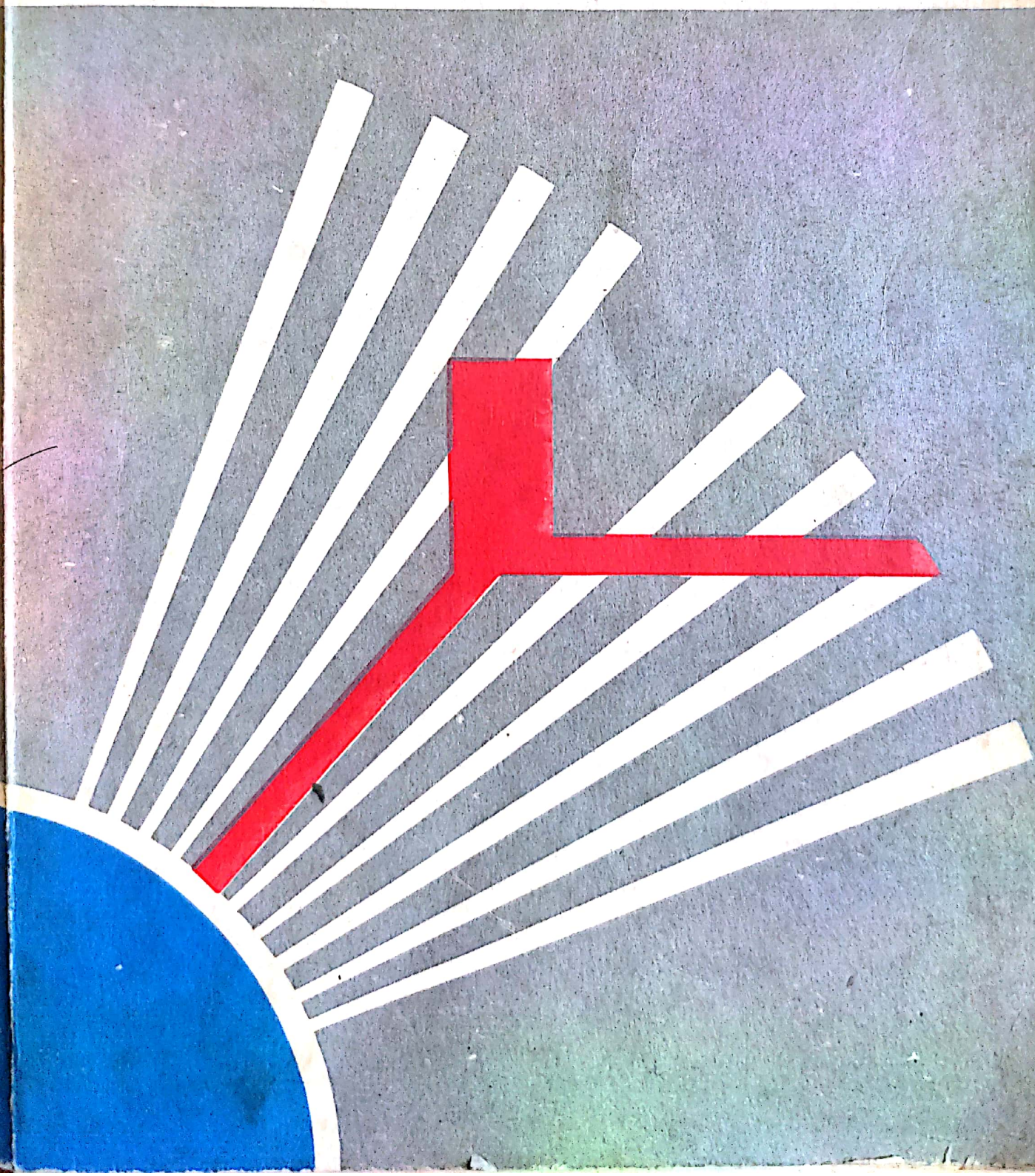
Marius Gall Anatolie Hristev

PROBLEME DATE LA OLIMPIADELE DE FIZICĂ



MARIUS GALL

ANATOLIE HRISTEV

PROBLEME DATE LA OLIMPIADELE DE FIZICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ—BUCUREȘTI, 1978

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚA

Prezenta culegere de probleme are un profil special, aparte. Ea cuprinde : problemele date la concursurile de selecție din țara noastră din perioada 1971—1976 și problemele date la toate olimpiadele internaționale de fizică (1967—1976).

Aparent lucrarea se adresează unui grup restrîns de elevi și anume acelor elevi care se pregătesc să intre în lotul republican pentru olimpiadele internaționale. În realitate, considerăm că această culegere poate fi de un real folos unei mase largi de elevi, profesorilor și chiar unor studenți din anii I și II (care audiază cursul de fizică generală), dornici deopotrivă de a rezolva probleme cu un grad mai ridicat de dificultate, cum și de a ataca lucrări experimentale care reclamă nu numai o bună tehnică de lucru dar și un spirit de ingeniozitate, de inventivitate și de creativitate. În acest sens ne-am străduit să prezentăm, în rezolvarea problemelor, nu doar un șir de indicații orientative, ci, un mod de gîndire în care elevul poate urmări strategia ce trebuie aplicată pentru a găsi soluția corespunzătoare.

Întrucît experiența anilor trecuți a demonstrat autorilor acestei lucrări, în calitate de conducători ai lotului republican la olimpiadele internaționale, că elevii selecționați în lot sînt nedumeriți într-o serie de probleme legate de organizarea și desfășurarea olimpiadelor, am ajuns la convingerea utilității prezentării unor extrase din „Statutul olimpiadei internaționale de fizică" cum și a întregii programe analitice pentru aceste olimpiade. Subliniem că programa de fizică pentru olimpiadele internaționale cuprinde o serie de teme care nu sînt incluse în programa de fizică de liceu din țara noastră.

Pentru o mai bună ghidare a elevilor am găsit că nu ar fi lipsit de interes să arătăm modul în care comisia de corectare acordă punctajul pe teme și subteme. Am ales pentru exemplificare, în acest sens, olimpiada din anul 1975. Tot atît de utilă

Scanned with OKEN Scanner

am considerat și prezentarea unei lucrări experimentale cu toate datele numerice reclamate de desfășurarea lucrării cum și cu calculul corespunzător al erorilor. (Datele ne-au fost furnizate prin bunăvoința studenților electroniști Tuhari Antonin și Ganciu Petcu Mihai, concurenți la Olimpiada internațională din anul 1974.)

Menționăm faptul că s-a respectat întocmai textul original al problemelor de la olimpiadele internaționale în care, uneori, unitățile mărimilor fizice au fost prezentate în sistemul CGS sau în sistemul tolerat. În rezolvarea problemelor însă s-a lucrat în sistemul SI, folosind numai acolo unde textul o cerea și unitățile tolerate.

În lucrare sînt prezentate problemele date la concursurile de selecție din perioada 1971—1976. (Cele din anii anteriori, adică 1967—1970, nu au fost incluse, fiind publicate în culegeri de probleme și reviste cu rezolvări detaliate.)

Concursul de selecție, prin care se stabilesc cei 5 elevi care ne reprezintă țara la olimpiada internațională, a constat pînă acum din două probe (punctajul fiind cumulat), proba întîi și proba a doua, fiecare cuprinzînd în general cîte 4 probleme. Excepție face anul 1971 cînd s-a dat în prealabil și o probă de preselecție pentru a forma, inițial, un lot mai larg de elevi (15 elevi) urmînd ca ulterior numai acești elevi să fie supuși probelor de selecție.*

Nu putem încheia aceste rînduri fără a stărui asupra faptului că inițiativa organizării olimpiadelor internaționale aparține țării noastre care a făcut demersuri în acest sens și a organizat prima olimpiadă internațională de matematică în anul 1958.

Prima olimpiadă internațională de fizică a avut loc în anul 1967 în R. P. Polonă. În anul 1972, țara noastră a fost gazda celei de a VI-a olimpiade internaționale de fizică la care au participat 9 țări.

AUTORII

* Se pot prezenta la concursul de selecție, conform regulamentului în vigoare, toți elevii care au obținut la concursul republican de fizică din anul respectiv, premii sau mențiuni.

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

ENUNȚURI

I. PROBELE DE SELECȚIE ALE LOTULUI OLIMPIC AL R. S. ROMÂNIA 6

II. OLIMPIADELE INTERNAȚIONALE DE FIZICĂ . . 18

SOLUȚII

I. PROBELE DE SELECȚIE ALE LOTULUI OLIMPIC AL R. S. ROMÂNIA 35

II. OLIMPIADELE INTERNAȚIONALE DE FIZICĂ . . 92

ANEXE

A. *Programa analitică pentru pregătirea participanților la olimpiadele internaționale de fizică* 162

B. *Extrase din statutul olimpiadei internaționale de fizică* . 166

C. *Extrase din directivele statutului olimpiadei internaționale de fizică* 167

Scanned with OKEN Scanner

ENUNȚURI

I.

Probele de selecție ale lotului olimpic al R. S. România

1971

Preselecție

1.1. Pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 0{,}10$ rad este așezat un corp în repaus. Coeficientul de frecare la lunecare dintre corp și plan este $\mu = 0{,}28$. Planul înclinat este pus într-o mișcare oscilatorie armonică cu amplitudinea $A = 4{,}9$ cm după o direcție conținută în planul înclinat. În ce direcție și cu ce frecvență minimă trebuie să oscileze planul pentru ca corpul să înceapă să lunece pe plan?

1.2. Un cilindru de masă m, rază R și moment de inerție I, este așezat pe un plan înclinat de unghi α. Pe cilindru este înfășurat un fir care este întins (fără frecare) de-a lungul planului înclinat, este trecut peste un scripete ideal și legat la un corp de masă M care atîrnă liber, ca în figura I.1. Care trebuie să fie coeficientul de frecare la lunecare minim necesar între cilindru și planul înclinat pentru ca cilindrul să se rostogolească fără lunecare?

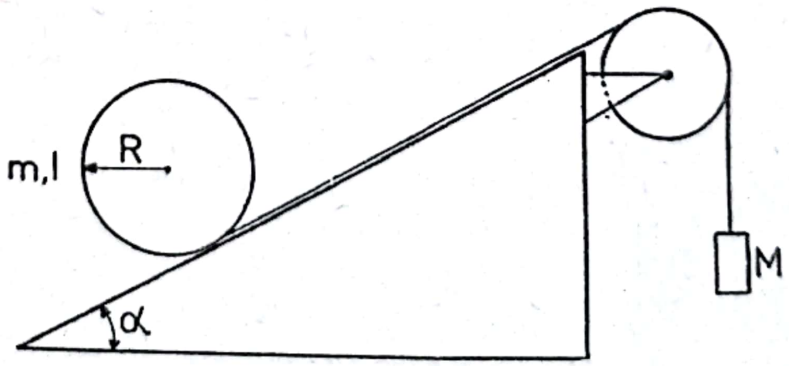


Fig. I.1.

1.3. În lipsa unor elemente galvanice identice au fost conectate în paralel două elemente galvanice cu tensiunile electromotoare E_1 și E_2 și rezistențele interioare r_1 și r_2. Ele debitează într-un circuit exterior de rezistență R.

Scanned with OKEN Scanner

Să se afle tensiunea electromotoare E și rezistența internă r a unui element galvanic care debitează în circuitul exterior același curent și să se arate ce relații trebuie să existe între E, E_1 și E_2.

Proba I

1.4. Pe suprafața interioară a unui cilindru fix de rază R, așezat orizontal, se rostogolește fără lunecare o bilă de rază r și masă m într-un plan perpendicular pe axa cilindrului (fig. I.2). Poziția inițială a bilei este dată de unghiul inițial α_0.

Să se calculeze:

a) Forța de apăsare normală $\vec{N}$ exercitată de bilă asupra suprafeței cilindrului.

b) Perioada micilor oscilații ale bilei în jurul poziției de echilibru.

c) Cît ar fi perioada micilor oscilații dacă n-ar exista frecarea dintre bilă și cilindru?

1.5. Știind că presiunea vaporilor saturanți variază cu temperatura conform ecuației Clapeyron — Clausius:

$$T\frac{dp_s}{dT} = \frac{\Lambda}{V_v - V_l} = \frac{\lambda}{v_v - v_l},$$

unde Λ (λ) este căldura latentă molară (respectiv, specifică) de vaporizare, iar V_v, V_l (v_v, v_l) — volumele molare (respectiv, specifice) ale vaporilor și lichidului, să se arate că la o variație de 2,7 Torr a presiunii atmosferice, temperatura de fierbere a apei variază cu 0,1°C.

Se dau căldura latentă de vaporizare a apei la 100°C: $\lambda = 2\,257$ kJ/kg și constanta gazelor $R = 8\,314$ J/kmol·K.

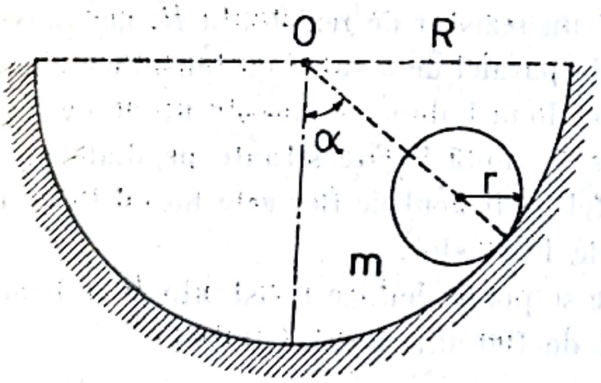


Fig. I.2.

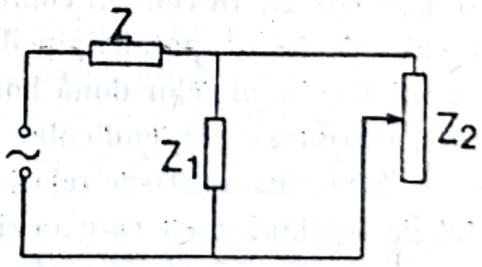


Fig. I.3.

1.6. Să se determine natura impedanțelor Z_1 și Z (fig. I.3) și raportul care trebuie să existe între ele, pentru ca I_2 să rămînă constant la orice valoare a impedanței Z_2.

1.7. Suprafața unui vas plin cu lichid este acoperită cu o membrană opacă, subțire, avînd în regiunea centrală o deschidere foarte mică. Vasul este așezat sub cerul liber. Lumina difuză a cerului formează în lichid un con luminos cu vîrful în orificiu. De ce?

Notînd cu h adîncimea lichidului din vas și cu r raza bazei conului luminos, să se determine indicele de refracție relativ al lichidului.

Scanned with OKEN Scanner

Proba II

1.8. Peste un scripete ideal care se rotește în jurul axei sale orizontale fixe, este trecut un fir. Un capăt al firului este legat la un corp de masă m, iar celălalt capăt este înfășurat peste un tambur de aceeași masă m, de rază R și de moment de inerție I (fig. I.4).

a) Să se calculeze accelerația centrului de masă al tamburului.

b) Cît va fi această accelerație dacă corpul de la celălalt capăt al firului se dezleagă și în locul său se trage de fir în jos cu o forță egală cu greutatea $\vec{mg}$ a acestui corp ?

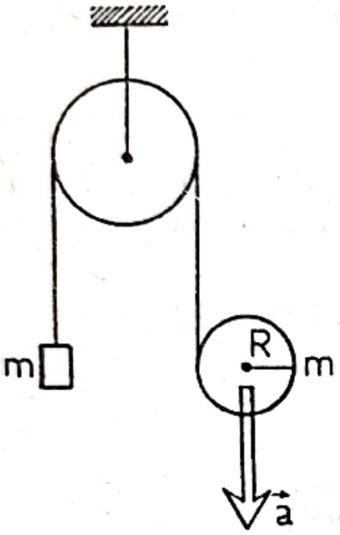


Fig. I.4.

1.9. Un vas de volum $V_1 = 50{,}0$ l, conținînd gaz la temperatura $\theta = 17{,}0°C$ și la presiunea normală, este legat printr-un tub scurt cu un alt vas de volum $V_2 = 15{,}0$ l, vidat. În tubul de legătură există o supapă care permite trecerea gazului din vasul 1 în vasul 2 dacă presiunea din vasul 1 depășește presiunea din vasul 2 cu $\Delta p = 880$ Torr. Care va fi presiunea în vasul 2 dacă ambele vase sînt încălzite pînă la temperatura $\theta' = 162°C$?

1.10. Două bobine circulare B_1 și B_2, avînd respectiv numărul de spire $N_1 = 50$, $N_2 = 100$ și raze egale $r_1 = r_2$, sînt așezate în două plane verticale perpendiculare, care se intersectează după un diametru comun celor două bobine. Bobinele au rezistențele $R_1 = 200\ \Omega$ respectiv $R_2 = 40\ \Omega$.

În serie cu bobina B_2 este montat un rezistor de rezistență R, necunoscută. Cele două bobine sînt alimentate în paralel de o sursă cu tensiunea electromotoare E. În centrul comun al celor două bobine se găsește un ac de fier moale, de formă paralelipipedică, prins în două lagăre situate pe diametrul de intersecție al celor două bobine, astfel încît acul de fier este mobil într-un plan orizontal, perpendicular pe planele bobinelor.

Să se demonstreze relația din care se poate deduce rezistența R în funcție de unghiul α cu care deviază acul de fier din poziția inițială.

1.11. Se dă o prismă ABC (fig. I.5), indicii de refracție satisfăcînd condiția $n_1 < n_2 > n_3$. Baza BC este absorbantă (neagră). Să se găsească condiția pe care trebuie să o îndeplinească unghiul refringent A al prismei pentru ca orice rază incidentă pe suprafața AB să poată ieși prin suprafața AC (condiția de emergență).

Să se calculeze valoarea limită a unghiului refringent A_{lim} pentru cazul : $n_1 = n_3 = 1$; $n_2 = 3/2$.

Se dau : $\sin 40°40' = 0{,}66480$; $\sin 40°50' = 0{,}66697$.

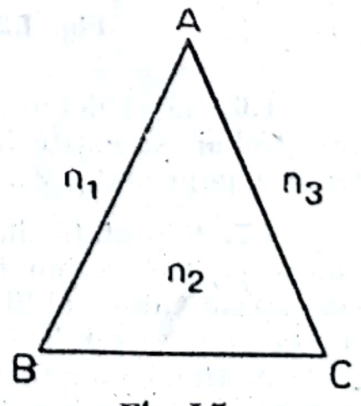


Fig. I.5.

Scanned with OKEN Scanner

1972

Proba I

2.1. Peste un cilindru orizontal fix de diametru D este aşezată orizontal, în echilibru, o scîndură omogenă de lungime l şi grosime b. Frecarea dintre scîndură şi cilindru este suficient de mare astfel încît scîndura să nu lunece pe cilindru. Să se afle:

a) Condiţia ca echilibrul scîndurii să fie stabil.

b) Perioada micilor oscilaţii ale scîndurii în jurul poziţiei de echilibru, în cazul echilibrului stabil.

2.2. O maşină frigorifică ideală funcţionează după ciclul Carnot inversat (parcurs în sens invers). Eficienţa maşinii este dată de raportul dintre lucrul mecanic L' consumat de maşină (de exemplu, furnizat de reţeaua electrică) şi căldura Q_1' absorbită de la sursa rece T_1.

Se cere să se producă $m = 1{,}00$ kg gheaţă din apă aflată la $\theta_1 = 0°C$. Temperatura mediului ambiant $\theta_2 = 20°C$.

Care este eficienţa maşinii ε, lucrul mecanic consumat L' şi căldura Q_2' cedată mediului ambiant?

2.3. O rază de lumină albă, cade sub un unghi $i = 30°$ pe o prismă care are unghiul $A = 45°$. Să se determine unghiul dintre razele extreme ale spectrului emergent, dacă indicele de refracţie al prismei pentru razele extreme ale spectrului vizibil are valorile $n_r = 1{,}62$ şi $n_v = 1{,}67$.

Proba II

2.4. Pe un scripete ideal care se poate roti în jurul axei sale orizontale fixe este trecut un cablu de masă neglijabilă. De un capăt al cablului este atîrnată o scară pe care se află un om, iar de celălalt capăt este legată o contragreutate care echilibrează greutatea scării şi a omului. La un moment dat omul începe să urce pe scară uniform accelerat parcurgînd o distanţă $s' = 2{,}1$ m pe scară. Să se afle cu ce înălţime s se ridică omul faţă de Pămînt, ştiind că masa omului este de $n = 6{,}0$ ori mai mare decît masa scării.

2.5. O eprubetă de lungime L, închisă cu un piston mobil de masă neglijabilă, conţine hidrogen la presiunea p_0. Eprubeta este introdusă în poziţie verticală (cu deschiderea în sus) într-un vas cu mercur, astfel încît capătul său inferior să ajungă la adîncimea h. În această situaţie să se determine lungimea porţiunii din eprubetă care conţine hidrogen.

Pentru ce valoare a lui h problema este rezolvabilă?

Se cunosc: densitatea mercurului şi presiunea atmosferică H. Temperatura hidrogenului rămîne constantă.

2.6. La un electromagnet de construcţie specială există o regiune în care pe axa Oy apare o limită de demarcaţie între două zone în care cîmpul magnetic are, respectiv, valorile B şi $2B$. Perpendicular pe cîmpul B şi pe

Scanned with OKEN Scanner

limita celor două zone intră un electron (e, m) cu viteza v_0 a cărui traiectorie (fig. I.6), constă din semicercuri cu raza a și semicercuri cu raza $a/2$. Care este viteza efectivă a electronului în lungul axei Oy ?

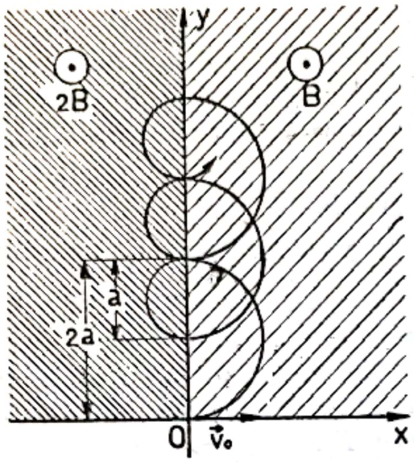


Fig. I.6.

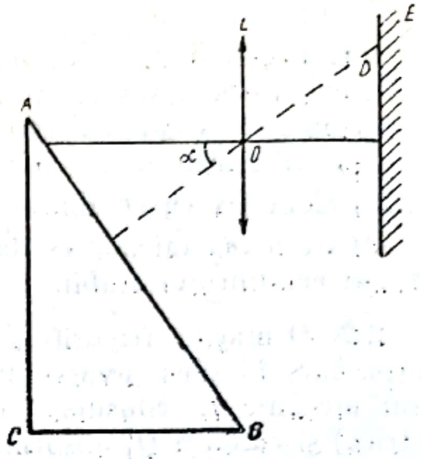


Fig. I.7.

2.7. Pentru determinarea indicelui de refracție al unei prisme de sticlă cu unghiul $A = 30°$ s-a folosit un montaj reprezentat schematic în desenul din figura I.7. Fața AC a prismei fiind luminată cu o lumină difuză, pe ecranul E se obține o zonă luminoasă și o zonă întunecată. Zona luminoasă a ecranului are extremitatea superioară în D. Dreapta care unește centrul lentilei cu marginea zonei luminoase face cu axa optică a lentilei un unghi $\alpha = 30°$. Să se determine indicele de refracție al prismei.

1973

Proba I

3.1. O șalupă se mișcă rectiliniu uniform, fiind propulsată cu ajutorul unui motor de tip reactiv care absoarbe apa printr-un orificiu de intrare și o ejectează printr-un orificiu de ieșire. Să se afle randamentul mecanic al motorului, știind că aria orificiului de ieșire este de n ori mai mică decît aria orificiului de intrare.

3.2. Să se demonstreze că într-o atmosferă cu temperatură constantă, independent de legea de variație a presiunii cu altitudinea, forța de ascensiune a unui balon cu învelișul elastic este constantă.

3.3. Două bile metalice cu razele $r_1 = 1{,}00$ cm și respectiv $r_2 = 2{,}00$ cm, care se găsesc la distanța $d = 100$ cm una de alta, sînt legate la un generator cu tensiunea electromotoare $E = 3{,}00$ kV. Să se determine forța de interacțiune a bilelor. Se neglijează interacțiunea firelor de legătură.

3.4. Un dispozitiv interferențial Young are caracteristicile următoare: distanța dintre fante $a = 0{,}12$ cm, distanța pînă la planul de observație $D = 300$ cm. Fantele sînt luminate cu lumină albă (limitele spectrului sînt $\lambda_1 = 0{,}40$ μm, pînă la $\lambda_2 = 0{,}80$ μm). În planul de observație se așază fanta

Scanned with OKEN Scanner

unui spectroscop, paralelă cu franja centrală albă, la distanța x de această franjă. Spectroscopul dă spectrul canelat al albului de ordin superior la distanța x.

a) Să se descrie spectrul observat și modificările sale cînd x variază pornind de la valoarea $x = 0$. Pentru aceasta, este necesar să se întocmească un grafic.

b) Să se calculeze lungimile de undă ale canelurilor observate cînd $x = 15$ mm.

Proba II

3.5. Pe o masă orizontală este așezată vertical o mică halteră formată din două bile mici identice, legate printr-o tijă subțire de masă neglijabilă, avînd distanța l între ele. Bilei superioare i se imprimă la un moment dat, printr-o lovitură, o viteză inițială orizontală v (fig. I.8).

a) Cît trebuie să fie această viteză pentru ca bila inferioară să se desprindă imediat de masă?

b) Cît trebuie să fie această viteză pentru ca bila inferioară să se desprindă imediat de masă și haltera să cadă apoi pe masă în poziție orizontală?

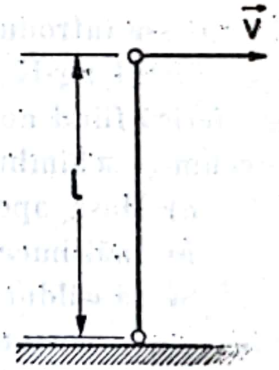


Fig. I.8.

3.6. Un balon de săpun cu volumul V este format dintr-o soluție cu tensiunea superficială σ. Presiunea în exteriorul balonului este p_0.

a) Să se calculeze diferența de presiune dintre fața interioară și cea exterioară a balonului.

b) Balonul de săpun este pus în contact cu unul din polii unei mașini electrostatice, care este încărcat la potențialul V. Să se scrie în acest caz ecuația de echilibru a balonului și să se calculeze variația razei balonului (presupunînd că această variație este foarte mică). Se presupune că balonul este izolat în spațiu.

3.7. O rețea electrică reprezentată schematic în figura I.9 este alcătuită din 12 conductoare, fiecare cu rezistența r. Să se afle rezistența echivalentă a rețelei în următoarele cazuri:

a) Curentul intră prin B și iese prin F.

b) Curentul intră prin A și iese prin C.

c) Curentul intră prin A și iese prin E.

d) Curentul intră prin B și iese prin O.

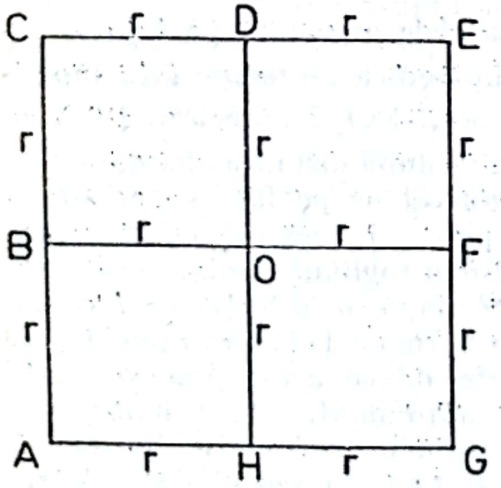


Fig. I.9.

3.8. O rază de lumină monocromatică traversează secțiunea principală a unei prisme ABC la minimum de deviație. Raza emergentă este reflectată de către o oglindă plană așezată paralel cu fața prismei (prin care iese lumina din prismă). Să se studieze deviația dată razei de către ansamblul prismă-oglindă.

Scanned with OKEN Scanner

1974

Proba I

4.1. O bilă de cauciuc de masă dată m cade liber în vid fără viteză inițială de la o înălțime cunoscută h. La fiecare ciocnire cu podeaua bila suferă o pierdere de viteză dată de o fracțiune cunoscută k ($(1-k)$ este coeficientul de restituire). Știind că timpul de contact dintre bilă și podea constituie o fracțiune dată f din timpul respectiv de cădere, să se calculeze:

a) Variația de impuls a bilei la prima ciocnire cu podeaua.

b) Timpul total pînă la oprirea definitivă a bilei.

4.2. Într-un cilindru cu piston de masă neglijabilă și secțiunea $S = 1\,000\ cm^2$ se află apă avînd masa $m_1 = 1{,}00$ kg la temperatura $\theta_1 = 0°C$. În apă s-a introdus o bucată de fier cu masa $m_2 = 1{,}00$ kg și căldura specifică $c_2 = 500$ J/kg·K încălzită pînă la temperatura $\theta_2 = 1\,100°C$. Presiunea atmosferică fiind normală (1 atm) și neglijînd capacitatea calorică a cilindrului precum și schimbul de căldură cu exteriorul, să se afle:

a) Masa apei ce se evaporă.

b) Înălțimea la care se va ridica pistonul.

Se dă căldura specifică a apei $c_1 = 4\,180$ J/kg·K și căldura latentă specifică de vaporizare a apei $\lambda_v = 2{,}25 \cdot 10^6$ J/kg.

4.3. O mașină electrostatică Van de Graaf are diametrul sferei conductoare $D = 3{,}00$ m, iar descărcarea electrică se produce la potențialul $V = 2{,}5$ MV. Banda izolatoare de încărcare are lățimea $b = 40$ cm și se deplasează cu viteza $v = 1{,}00$ m/s, rezistența mecanică opusă fiind $F = 5{,}00$ kgf. Știind că electrizarea benzii se face prin influență, iar antrenarea acesteia se face cu un electromotor cu puterea $P = 150$ W, se cere:

a) Schema mașinii Van de Graaf respective.

b) Intervalul de timp între două descărcări electrice succesive.

c) Densitatea electrică superficială pe porțiunea ascendentă a benzii.

4.4. Se consideră o lamă cu fețe plan paralele argintată pe fața sa inferioară F_i. Fie un obiect M de formă paralelipipedică așezat pe fața superioară a lamei F_s (fig. I.10). Să se arate că este posibil să se aprecieze grosimea lamei (așa cum procedează cei care fabrică oglinzi) după distanța aparentă PA, A fiind punctul de pe fața superioară a lamei ce pare să coincidă cu imaginea lui P în sistem (oglindă-lamă), cînd vizarea are loc după o direcție ce face un unghi i cu normala la lamă în punctul A. Să se arate de ce acest procedeu este destul de aproximativ. Ce anume s-ar putea întreprinde pentru a se obține un rezultat mai bun (în sensul de a determina unghiul i cît mai precis)?

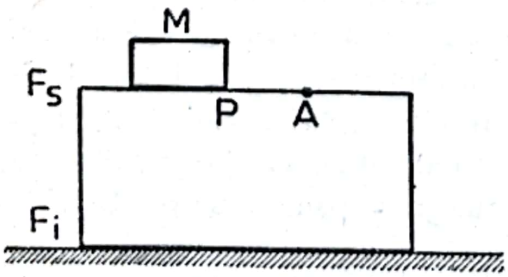


Fig. I.10.

Scanned with OKEN Scanner

Proba II

4.5. Peste un cilindru orizontal fix de diametru dat D este așezată transversal și orizontal, în echilibru, o scîndură omogenă de lungime dată l și grosime dată b. Frecarea dintre scîndură și cilindru este suficient de mare astfel încît scîndura nu lunecă pe cilindru. Să se afle :

a) Condiția ca echilibrul scîndurii să fie stabil.

b) Perioada micilor oscilații ale scîndurii în jurul poziției de echilibru (în cazul echilibrului stabil).

4.6. Cu o cantitate de gaz ideal se efectuează o transformare ciclică alcătuită din două izocore și două adiabate astfel încît raportul $\varepsilon = V_{max}/V_{min} = 9/4$. Știind că diferența de temperatură a stărilor reprezentate prin punctele de intersecție a izocorei $V = V_{min}$ = const. cu adiabatele este $T_2 - T_1 = 100°C$ și că suprafața ciclului este $A = 100$ kcal, iar randamentul ciclului $\eta = 1/3$, să se determine :

a) Valoarea indicelui (exponentului) γ al adiabatei.

b) Diferența de temperatură $T_3 - T_4$ a stărilor reprezentate prin punctele de intersecție a izocorei V_{max} cu adiabatele.

c) Numărul de moli ai gazului cu care se efectuează transformarea ciclică.

4.7. O spiră de rază r, confecționată din substanță conductoare, se află într-un cîmp magnetic, planul său fiind perpendicular pe liniile de cîmp. Cîmpul este uniform și variabil în timp după legea : $B = B_{max} \sin \omega t$. Se cere :

a) Expresia tensiunii electromotoare induse în spiră.

b) Dacă spira atinge temperatura de topire în intervalul de timp t, care este valoarea lui B_{max}, cunoscînd temperatura mediului ambiant θ_1, densitatea metalului din care s-a confecționat spira δ, rezistivitatea conductorului ρ și căldura specifică c ?

c) Considerînd că spira s-a topit pe o porțiune foarte mică, care va fi expresia tensiunii dintre capetele astfel rezultate ?

4.8. O lentilă convergentă subțire L de distanță focală $f = 60$ cm și două prisme identice P și P' de unghi A mic (sub 10°) sînt dispuse ca în figura I.11.

Se lasă să cadă asupra sistemului un fascicul de raze, paralele cu axa principală a lentilei. Presupunînd că fasciculul de lumină este monocromatic (pentru a elimina fenomenul de dispersie), se constată în planul focal al lentilei L două puncte luminoase la distanța $d = 8{,}4$ cm. Se cere :

a) Să se reprezinte mersul razelor de lumină prin sistemul optic dat și să se explice formarea celor două imagini în planul focal al lentilei.

b) Să se calculeze unghiul A al prismelor P și P' (indicele de refracție pentru ambele prisme este $n = 1{,}5$).

c) Se depărtează progresiv cele două prisme prin mișcări de translație opuse, după o direcție perpendiculară pe axa principală. Să se descrie modificările survenite în ceea ce privește aspectul fenomenului în planul focal al lentilei.

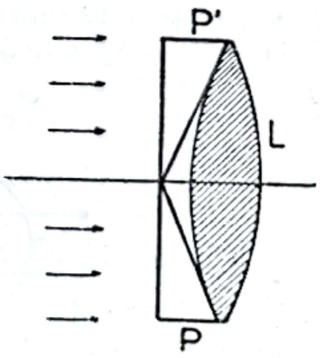


Fig. I.11.

Scanned with OKEN Scanner

1975

Proba I

5.1. Sistemul din figura I.12, alcătuit dintr-o bară de greutate $\vec{G}$ articulată în O, un fir inextensibil de masă neglijabilă, trecut peste un scripete S (de rază mică) și un corp de greutate $\vec{P}$, se află în echilibru. Articulația O și scripetele S se află pe aceeași dreaptă orizontală și distanța OS este egală cu lungimea barei. Să se stabilească ce fel de echilibru este: stabil, instabil sau indiferent?

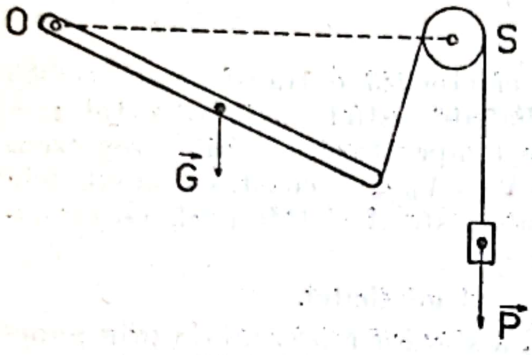


Fig. I.12.

5.2. Două bile având masele m_1 și m_2 se deplasează una spre cealaltă, pe aceeași direcție, cu energiile cinetice E_1 și E_2, și se ciocnesc plastic. În ce condiție se vor mișca după ciocnire în sensul în care se mișca bila cu energie cinetică mai mică?

5.3. Rezervorul unui termometru cu gaz la volum constant este umplut cu aer la temperatura $\theta = 20°C$. La 0°C presiunea aerului din rezervor este normală. La temperatura măsurată cu acest termometru presiunea a devenit $p = 815$ Torr. Care este această temperatură măsurată, dacă aerul din rezervorul termometrului: *a*) era uscat, *b*) era de fapt umed, având umiditatea $U = 60\%$ la temperatura $\theta = 20°C$ (la care s-a făcut umplerea balonului termometrului)?

Se dau presiunile vaporilor saturanți ai apei: la 0°C, $p_{s0} = 4{,}58$ Torr și la $\theta = 20°C$, $p_s = 17{,}5$ Torr.

5.4. Fie dispozitivul din figura I.13, unde K este un catod ce emite electroni prin emisie termoelectronică, A este un anod ce are o fantă F, C — un condensator, iar E — un ecran fluorescent.

a) Tensiunea de accelerare fiind $U_1 = 480$ V, să se calculeze energia cinetică a electronilor dincolo de fanta F. Ce tensiune este necesară pentru a dubla viteza electronilor?

b) Fasciculul de electroni este supus acțiunii simultane a unui cîmp electric și a unui cîmp magnetic cu direcțiile perpendiculare ($\vec{B}$ acționează în zona punctată în figură). Ce valoare trebuie să aibă $\vec{B}$ pentru ca deviația spotului pe ecranul fluorescent să fie nulă? Cum se poate determina, în acest caz, sarcina specifică a electronului? (Să se determine valoarea aproximativă a lui e/m.)

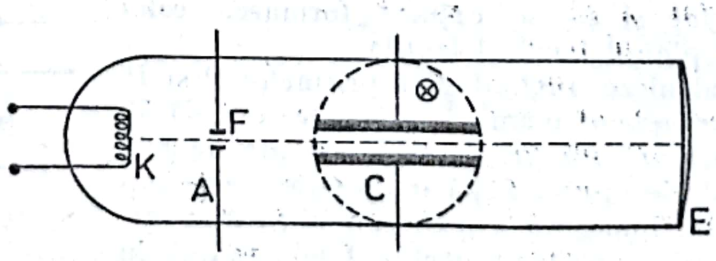


Fig. I.13.

Scanned with OKEN Scanner

Se dau: tensiunea dintre armăturile condensatorului $U_2 = 1\,300$ V, distanța dintre armături $d = 10{,}0$ cm, sarcina electronului $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C și $m_e = 9{,}0 \cdot 10^{-31}$ kg.

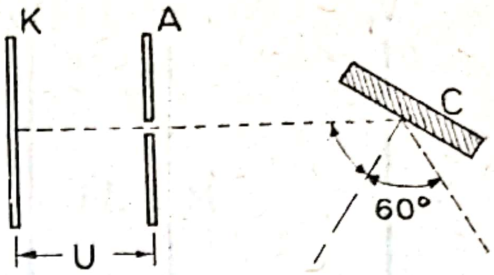


Fig. I.14.

5.5. Un fascicul de electroni emiși de un catod K accelerat sub o diferență de potențial U, trece printr-un anod A și cade pe o lamă cristalină C pe care se difractă (fig. I.14). Se constată că al doilea maxim de difracție are loc sub un unghi $\alpha = 60°$ în raport cu normala la lama C. Știind că planele reticulare difractante, paralele cu fața lamei C, sînt depărtate între ele cu $d = 2{,}0$ Å, se cere tensiunea accelератoare U.

Se dau $m = 9{,}0 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ J.s.

Proba II

5.6. Un corp cu masa $m_1 = 8{,}0$ kg este lăsat să lunece pe un plan înclinat cu lungimea $L = 30$ m și înclinația $\alpha = 30°$. În același moment este lansat în sus de-a lungul planului înclinat, cu viteza $v_{02} = 72$ km/h un corp cu masa $m_2 = 2{,}0$ kg (fig. I.15). Coeficientul de frecare al acestor corpuri cu planul înclinat este $\mu_1 = 1/2\sqrt{3}$. La o distanță $d = 8{,}5$ m de baza planului înclinat se află un pendul balistic cu lungimea $l = 4{,}9$ m și masa $m_3 = 10{,}0$ kg. Care va fi unghiul maxim de înclinare al pendulului față de verticală, dacă în urma ciocnirii plastice a celor două corpuri, corpul rezultat prin lipirea acestora se deplasează pe planul orizontal cu coeficientul de frecare $\mu_2 = 0{,}50$ și ciocnește perfect elastic pendulul ($g = 10$ m/s²)?

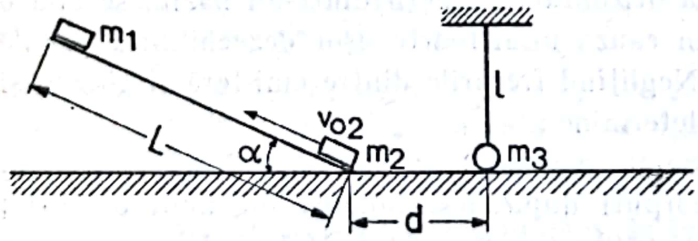


Fig. I.15.

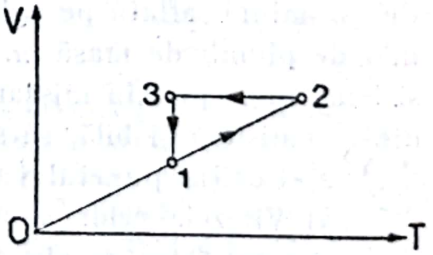


Fig. I.16.

5.7. Se dă ciclul din figura I.16 trasat în diagrama V—T.

a) Să se traseze ciclul în diagramele p—V și p—T.

b) Să se calculeze randamentul ciclului în funcție de raportul de compresie $\varepsilon = V_3/V_1$ și exponentul adiabatic $\gamma = C_p/C_v$.

c) Să se compare acest randament cu randamentul unui ciclu Carnot funcționînd între temperaturile extreme ale ciclului dat.

Aplicație numerică: $\varepsilon = 2{,}0$, $\gamma = 1{,}40$.

Scanned with OKEN Scanner

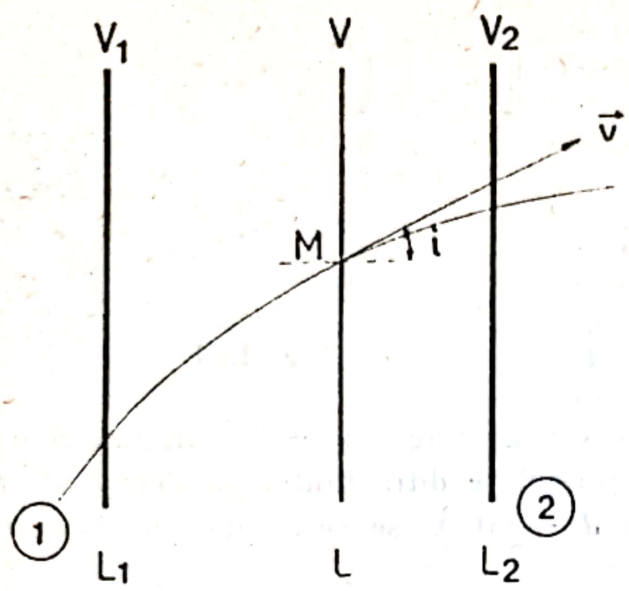


Fig. I.17.

5.8. Două lame metalice plane L_1 și L_2, foarte lungi și foarte subțiri, transparente pentru electroni, sînt dispuse paralel la o distanță foarte mică. Potențialele lamelor au valorile V_1 și V_2, V_1 fiind tot timpul pozitiv. Sursa care emite electroni, cu viteza inițială nulă, este la potențialul zero. Traiectoria unui electron întîlnește o suprafață echipotențială V în punctul M sub un unghi de incidență i (fig. I.17).

a) Să se stabilească relația:

$$\sqrt{V}\cdot\sin i = \text{const.}$$

b) Ce analogie optică vă este sugerată de comportarea electronilor între lamele L_1 și L_2 (se face o comparație cu străbaterea unei lame cu fețe plane și paralele de către o rază de lumină)?

c) Cum poate fi definit indicele de refracție electronic al mediului 2 față de mediul 1?

5.9. Prezentați o metodă pentru determinarea indicelui de refracție al unui lichid.

1976

Proba I

6.1. În punctul superior al unei emisfere omogene de rază R și masă M, din aluminiu, aflată pe oglinda orizontală a gheții dintr-un bazin, se află o bilă de plumb de masă m. Din cauza unui foarte ușor dezechilibru, părțile sistemului se pun în mișcare. Neglijînd frecările dintre emisferă și gheață și dintre emisferă și bilă, să se determine:

a) Poziția punctului P de pe emisferă unde bila părăsește emisfera.

b) Vitezele celor două corpuri după desprinderea lor unul de altul.

c) Cantitatea de gheață (la 0°C) ce se poate topi, folosind energia cinetică a bilei căzută pe gheață (ciocnire plastică).

Căldura latentă specifică a gheții se presupune cunoscută.

Emisfera, bila și gheața au aceeași temperatură 0°C.

6.2. O masă de gaz suferă o transformare ciclică ca în figura I.18. Se dau volumele: $V_1 = 1{,}00$ l și $V_2 = V_4 = 2{,}00$ l.

a) Să se arate că $p_1 = p_3$.

b) Să se calculeze V_3.

c) Să se transcrie ciclul în diagramele V—T și p—T.

Scanned with OKEN Scanner

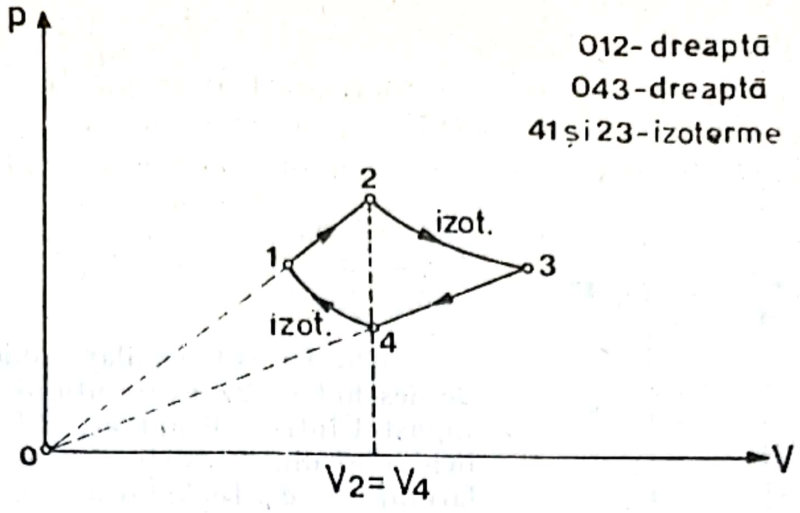


Fig. I.18.

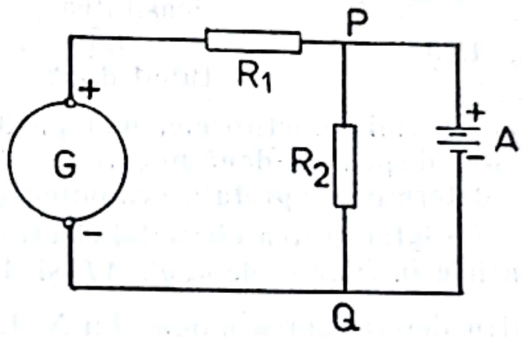


Fig. I.19.

6.3. Fie circuitul din figura I.19 unde G este un dinam și A un acumulator. Tensiunea electromotoare a dinamului variază liniar cu timpul astfel încît în $T=24$ h scade de la $E_1=6{,}1$ V la $E_1'=5{,}5$ V. Rezistența interioară a dinamului este neglijabilă. Acumulatorul are o tensiune electromotoare constantă $E_2=4{,}0$ V și rezistența internă $r=0{,}050\ \Omega$. Cei doi rezistori au rezistențele $R_1=4{,}0\ \Omega$ și $R_2=8{,}0\ \Omega$.

a) Să se calculeze intensitățile curenților în ramificațiile circuitului.

b) Să se exprime intensitatea curentului în ramura ce cuprinde acumulatorul în funcție de timp. Discuții.

6.4. O lentilă plan-convexă se așază cu fața convexă pe o lamă cu fețe plane și paralele. Lentila și lama sînt confecționate din sticlă cu indicele de refracție n. Între fața convexă a lentilei de rază de curbură R și lamă se închide o lamă de aer de grosime variabilă. Se iluminează dispozitivul cu radiație monocromatică de lungime de undă λ, la incidență normală. Să se determine :

a) Raza unui inel luminos și raza unui inel întunecat.

b) Cum este centrul figurii de interferență, dacă interferența se produce între razele reflectate ?

c) Să se calculeze distanța focală a lentilei folosite, dacă indicele de refracție al sticlei (din care este confecționată lentila) este $n=1{,}5$, iar raza celui de-al treilea inel luminos este $r=1{,}1$ mm. Se dă $\lambda=5\,893$ Å.

d) Cum va fi figura de interferență dacă între lentilă și lamă se toarnă sulfură de carbon cu indicele de refracție $n=1{,}63$?

Scanned with OKEN Scanner

Proba II

6.5. Fie două blocuri de oțel ca în figura I.20. Pe unul din ele se găsește o bilă de masă m și de diametru D, în repaus, care este ciocnită perfect elastic de o bilă de masă M ce se deplasează cu viteza $\vec{v}$. Ciocnirile bilei de masă m cu pereții sînt perfect elastice, timpii de ciocnire sînt zero. Să se calculeze cîte ciocniri face bila de masă m cu pereții pînă ajunge jos.

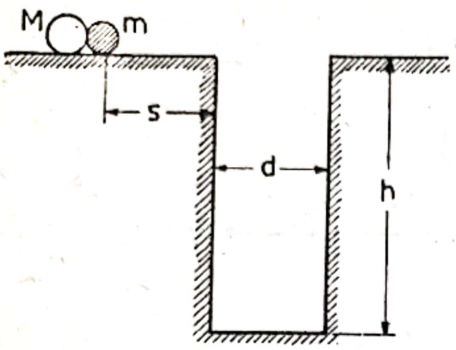


Fig. I.20

6.6. Un tub capilar conic cu unghiul de deschidere 2α este cufundat cu capătul îngustat într-un lichid, astfel încît la nivelul lichidului din vas diametrul interior al capilarului este d_o. Lichidul udă complet sticla, are coeficientul de tensiune superficială σ și densitatea ρ.

La ce înălțime se va ridica lichidul în tubul dat?

6.7. Două sarcini punctiforme, una pozitivă $+q$ și alta negativă $-q'$ (unde $q' < q$) sînt dispuse în două puncte A și B.

a) Să se determine suprafața echipotențială S de potențial zero.

b) Să se afle intensitatea cîmpului electric E într-un punct M al suprafeței echipotențiale în funcție de q, q', AB și AM.

6.8. Pentru determinarea numărului N de trăsături pe unitatea de lungime a unei rețele plane se face următoarea experiență: se trimite perpendicular pe planul rețelei un fascicul de lumină albă, iar radiația difractată în spectrul de ordinul al doilea, sub un unghi $\theta = 30°$, este trimisă pe o celulă fotoelectrică de sodiu. Pentru a opri sosirea fotoeletronilor emiși pe anod este nevoie de o diferență de potențial constantă $U = 0{,}475$ V. Se cere N. Energia de ieșire a electronilor de sodiu este $E_e = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ J. Constanta lui Planck este $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ J.s.

II.

Olimpiadele internaționale de fizică

Prima Olimpiadă internațională de fizică 1967, Varșovia, R. P. Polonă

Problema 1 *(Mecanică).* Pe un stîlp de înălțime $h = 5{,}00$ m se află o bilă de masă $M = 200$ g. Ea este străpunsă de un glonț avînd viteza $v_0 = 500$ m/s și masa $m = 10{,}0$ g, exact prin mijloc (fig. II.1).

Scanned with OKEN Scanner

La ce distanță s va cădea glonțul, dacă bila cade la o distanță $s_1 = 20{,}0$ m de la baza stîlpului?

Ce fracțiune din energia cinetică a glonțului este transformată în căldură în timpul străpungerii?

Rezistența aerului se neglijează.

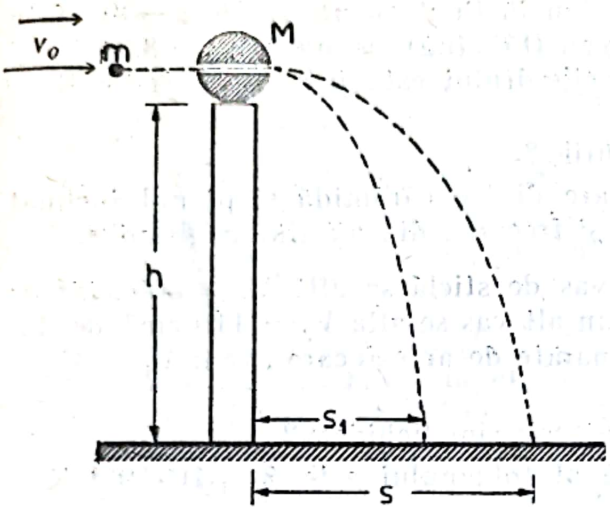


Fig. II.1.

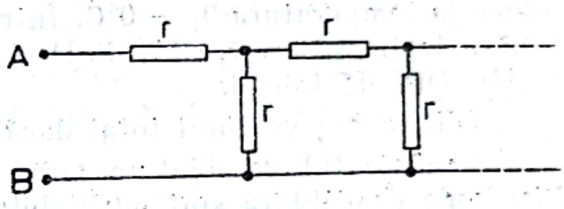


Fig. II.2.

Problema 2 *(Electricitate).* Să se calculeze rezistența între punctele A și B a lanțului nesfîrșit de rezistențe, conectate ca în figura II.2.

Problema 3 *(Căldură).* Se dau două sfere identice (din același material, de aceleași dimensiuni, de aceeași masă), aflate la aceeași temperatură. Una din sfere este suspendată de un fir, cealaltă este așezată pe un plan orizontal. Celor două sfere li se transmit cantități egale de căldură. Procesul de încălzire se produce suficient de repede astfel încît schimbul de căldură cu mediul ambiant este neglijabil.

Cum vor fi temperaturile finale ale celor două sfere, după procesul de încălzire, egale sau diferite? Să se fundamenteze răspunsul.

Problema 4 *(Termodinamică).* Într-un vas de volum $V = 10{,}0$ l se găsește aer uscat în condiții normale. În vas se introduce o masă $m = 3{,}0$ g de apă, după care vasul este încălzit pînă la 100°C.

Care va fi presiunea după încălzire?

Dilatarea termică este neglijabilă.

Lucrarea experimentală *(Căldură).* Se pun următoarele aparate la dispoziție:

Balanță, alice pentru tară, calorimetru, termometru, sursă de curent, întrerupător, conductori de conexiune, încălzitor electric, vase de sticlă, apă, petrol, cronometru.

Temă: Să se determine căldura specifică a petrolului. Capacitatea calorică a calorimetrului poate fi neglijată. Pentru căldura specifică a apei se poate lua valoarea $c_0 = 4\,180$ J/kg·K. Să se indice sursele de erori.

Cum s-ar putea determina, în aceleași condiții, căldura specifică a petrolului, dacă trebuie luată în considerație și capacitatea calorică a calorimetrului? Se dă $c_{vas} = 380$ J/kg·K.

Scanned with OKEN Scanner

A II-a

Olimpiadă internațională de fizică

1968, Budapesta, R. P. Ungară

Problema 1 *(Mecanică).* Pe un plan înclinat cu un unghi $\alpha = 30°$ față de orizontală se află un cilindru omogen (tăvălug) cu masa $m_1 = 8{,}00$ kg și cu diametrul $d = 10{,}0$ cm. De axul cilindrului este prinsă printr-un fir o cărămidă de masă $m_2 = 4{,}00$ kg.

Cu ce accelerație se mișcă corpurile?

Coecifientul de frecare la lunecare dintre cărămidă și planul înclinat este $\mu = 0{,}20$. Frecarea la rostogolire și frecarea din ax sînt neglijabile.

Problema 2 *(Căldură).* Într-un vas de sticlă se află $V_1 = 300$ cm³ de toluen la temperatura $\theta_1 = 0°C$. Într-un alt vas se află $V_2 = 110$ cm³ de toluen la temperatura $\theta_2 = 100°C$. Deci înainte de amestecare avem $V_1 + V_2 = 410$ cm³ de toluen.

Cît devine volumul total dacă amestecăm lichidele?

Coeficientul de dilatare termică al toluenului este $\beta = 10 \cdot 10^{-4}$ K^{-1}. Pierderile de căldură sînt neglijabile.

Problema 3 *(Optică).* Un semicilindru este confecționat din sticlă cu indicele de refracție $n = \sqrt{2}$. Pe fața plană cad raze de lumină sub un unghi $\alpha = 45°$. Razele de lumină se află într-un plan perpendicular pe axa cilindrului.

Pe ce porțiune a suprafeței cilindrice ies razele de lumină?

Lucrarea experimentală *(Electricitate).* Se dau trei cutii care nu pot fi deschise. În fiecare cutie este conținut un element de montaj electric.

a) Să se determine ce fel de element de montaj există în fiecare cutie.

b) Să se determine parametrii caracteristici ai elementelor de montaj.

Se pun la dispoziție:

Două instrumente de măsură universale, sursă de tensiune alternativă de 50 Hz, sursă de tensiune continuă.

Se dau de asemenea rezistențele interne ale aparatelor de măsură pentru diferite domenii de măsură. Eroarea de măsură pentru curent continuu este de 2%, iar pentru curentul alternativ de 3%.

A III-a

Olimpiadă internațională de fizică

1969, Brno, R. S. Cehoslovacă

Problema 1 *(Mecanică).* Un sistem mecanic constă din trei cărucioare A, B, C, care au următoarele mase: $m_1 = 300$ g, $m_2 = 200$ g, $m_3 = 1\,500$ g (fig. II.3).

α. Asupra cărucioarelor C acționează o forță orizontală a cărei mărime este astfel încît cărucioarele A și B rămîn în repaus față de cărucioarele C.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se calculeze tensiunea din firul care leagă cărucioarele A și B între ele.

b) Să se determine mărimea forței $\vec{F}$.

β. Se consideră sistemul în ipoteza că acum căruciorul C este fixat.

a) Să se calculeze accelerația cărucioarelor A și B.

b) Să se calculeze tensiunea din fir.

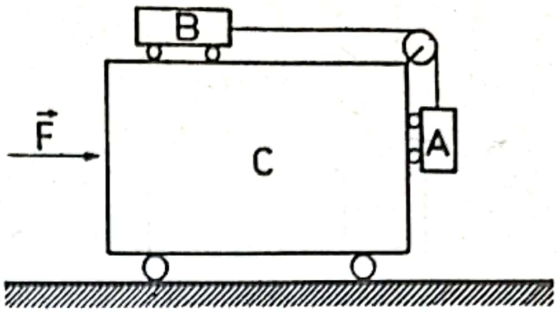


Fig. II.3.

Se neglijează toate forțele de rezistență și de frecare. Masa firului, ca și momentele de inerție ale scripetelui și tuturor roților cărucioarelor sînt de asemenea neglijabile.

Problema 2 *(Căldură).* Într-un vas calorimetric din cupru de masă m_1 se află o masă de apă m_2. Temperatura de echilibru a întregului sistem este θ_2. O bucată de gheață de masă m_3 și cu temperatura $\theta_3 < 0°C$ este introdusă în apa din calorimetru.

a) Să se determine temperatura și masele apei și gheții în starea de echilibru, presupunînd că mărimile m_1, m_2, m_3, θ_2, θ_3 sînt oarecare. Să se scrie ecuațiile calorimetrice pentru toate procesele posibile care trebuie considerate la rezolvare.

b) Să se determine temperatura și masele apei și gheții în starea de echilibru, dacă se dau următoarele valori:

$$m_1 = 1{,}00 \text{ kg}, \quad m_2 = 1{,}00 \text{ kg}, \quad m_3 = 2{,}00 \text{ kg}, \quad \theta_2 = 10°C, \quad \theta_3 = -20°C.$$

Observație. Pierderile de căldură sînt neglijabile. Presiunea atmosferică este cea normală.

Căldurile specifice sînt următoarele: cupru $c_1 = 395$ J/kg·K, gheață $c_3 = 2\,050$ J/kg·K, căldura latentă de topire a gheții $\lambda = 335$ kJ/kg.

Problema 3 *(Electricitate).* O sferă de masă m are o sarcină electrică q și este fixată la capătul unui fir subțire neconductor. Celălalt capăt al firului este fixat de punctul superior al unui inel subțire de rază R. Inelul este confecționat din sîrmă metalică rigidă de secțiune neglijabilă și se află într-un plan vertical. Pe inel este distribuită uniform o sarcină electrică Q, de același semn cu q.

Să se determine lungimea firului l astfel încît poziția finală a sferei, după deviația sa, să fie pe axa inelului perpendiculară pe planul său.

Se va găsi mai întîi soluția generală a problemei, apoi soluția care corespunde valorilor:

$$Q = q = 9{,}0 \cdot 10^{-8} \text{ C}, \quad R = 5{,}0 \text{ cm}, \quad m = 1{,}0 \text{ g}, \quad \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}.$$

Masa firului este neglijabilă.

Problema 4 *(Optică* și *Căldură).* Peste un cub de sticlă șlefuit optic cu latura $h = 2{,}00$ cm este fixată o lamă șlefuită, astfel încît între cub și lamă se formează un strat subțire plan-paralel de aer (fig. II.4). Dacă se trimite perpendicular pe această lamă, de sus în jos, o radiație electromagnetică care

Scanned with OKEN Scanner

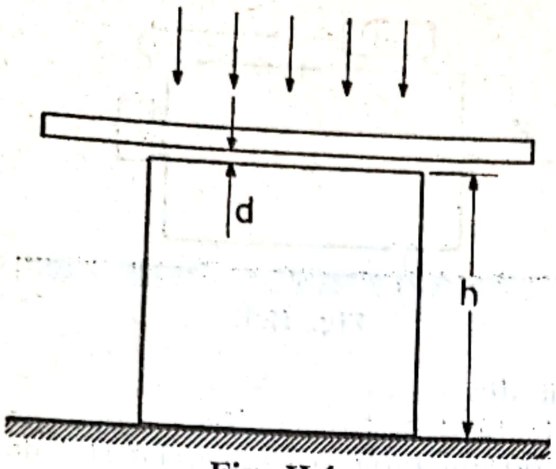


Fig. II.4.

cuprinde toate lungimile de undă de la $\lambda_1 = 400{,}0$ nm la $\lambda_2 = 1\,150$ nm, atunci condiția de interferență maximă prin reflexie pe stratul subțire de aer este îndeplinită numai pentru două lungimi de undă ale intervalului de mai sus, și anume pentru $\lambda = 400{,}0$ nm și pentru încă o lungime de undă.

Să se determine această a doua lungime de undă.

Să se calculeze cu cîte grade trebuie încălzit cubul pentru a veni în contact cu lama. Distanța lamei pînă la baza inferioară a cubului rămîne constantă în timpul încălzirii. Coeficientul de dilatare liniară termică a sticlei este $\alpha = 8{,}0 \cdot 10^{-6}\ K^{-1}$. Indicele de refracție al aerului este $n = 1$.

Lucrarea experimentală *(Electricitate).* Se vor folosi următoarele mijloace:

Două acumulatoare NiFe, un element uscat, un conductor de rezistență necunoscută X prevăzut cu o riglă milimetrică de măsură și cu un cursor, o cutie cu rezistențe în decade (cu o rezistență etalon R), un galvanometru (indicator de zero) și o rezistență-siguranță.

Se consideră:

a) Un circuit închis, format din cele două acumulatoare NiFe conectate în serie, cutia de rezistențe în decade și rezistența necunoscută X.

b) O derivație de curent formată din legarea în serie a elementului uscat și a galvanometrului cu rezistență-siguranță.

Să se stabilească și să se justifice o schemă de conectare a derivației *b*) la circuitul închis *a*), care să permită găsirea unei poziții a cursorului pe rezistența X pentru care galvanometrul să nu dea nici-o deviație.

Să se determine cu ajutorul montajului găsit:

1) Raportul dintre tensiunea la borne a celor două acumulatoare legate în serie și tensiunea electromotoare a elementului uscat.

2) Rezistența necunoscută X. Tensiunea la borne a acumulatoarelor NiFe se va considera constantă.

Se va stabili condiția pentru rezistența R, astfel ca să existe o soluție a problemei.

A IV-a
Olimpiadă internațională de fizică
1970, Moscova, U.R.S.S.

Problema 1 *(Mecanică).* Pe o suprafață orizontală netedă (fără frecări) se poate deplasa o scîndură de masă $M = 1{,}00$ kg. Pe suprafața orizontală superioară a scîndurii poate luneca cu frecare o săniuță. Marginea anterioară a săniuței se găsește la o distanță $l = 50$ cm de marginea anterioară a scîndurii în momentul eliberării săniuței. Coeficientul de frecare la lunecare este $\mu = 0{,}020$, masa săniuței cu motor $m = 100$ g. Pe săniuță este instalat un

Scanned with OKEN Scanner

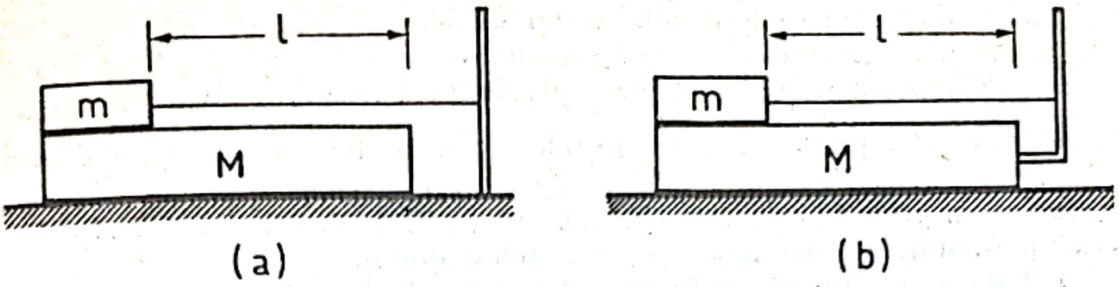


Fig. II.5.

motor, care înfăşoară pe un tambur un fir cu viteza constantă $v_0 = 10$ cm/s. Celălalt capăt al firului este legat, în primul caz (fig. II.5, *a*) de un par suficient de depărtat, care este fixat de planul suport, şi în al doilea caz (fig. II.5, *b*) de un par care este fixat chiar de scîndura M.

Se ţine scîndura M fixă şi i se dă posibilitate săniuţei să se mişte cu viteza v_0, după care se lasă liberă şi scîndura.

Să se stabilească în cele două cazuri felul mişcării şi viteza scîndurii şi a săniuţei după ce sînt lăsate libere.

Să se determine în cele două cazuri timpul în care săniuţa atinge marginea anterioară a scîndurii.

Problema 2 *(Fizica moleculară)*. Celula elementară a reţelei cristaline a sării de bucătărie (NaCl) reprezintă un cub; lungimea muchiei cubului este $a = 5{,}6$ Å (1 Å $= 10^{-10}$ m). În figura II.6 sînt reprezentaţi ionii de sodiu şi ionii de clor într-o celulă elementară. Întreaga reţea cristalină a sării de bucătărie reprezintă o repetare a unor astfel de celule elementare. Masa atomică a sodiului este 23, iar a clorului 35,5. Densitatea sării $\rho = 2{,}22$ g/cm^3.

Să se calculeze masa absolută a atomului de hidrogen şi să se explice rezolvarea.

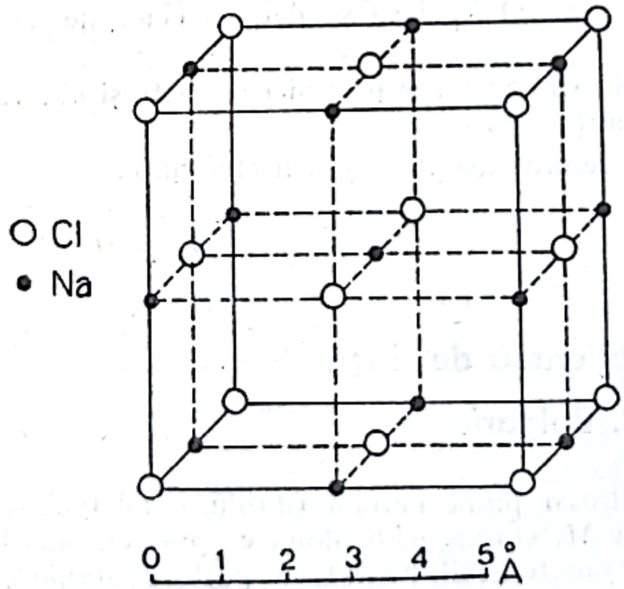


Fig. II.6.

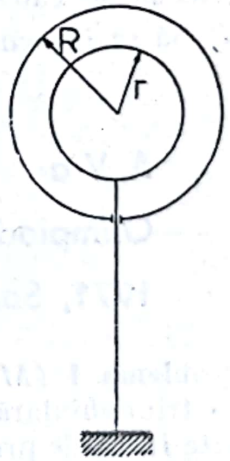


Fig. II.7.

Problema 3 *(Electricitate)*. Se dă o sferă goală de metal cu pereţii subţiri şi de rază $R = 20{,}0$ cm. În interiorul acestei sfere este dispusă concentric o sferă metalică de rază $r = 10{,}0$ cm. Această sferă este legată la Pămînt printr-un conductor foarte lung care trece printr-un orificiu din peretele sferei goale (fig. II.7). Pe sfera exterioară se găseşte o sarcină $Q = 1{,}00 \cdot 10^{-8}$ C.

Scanned with OKEN Scanner

Să se determine potențialul sferei goale.
Să se determine capacitatea sistemului.
Să se indice schema electrică echivalentă a acestui sistem.

Problema 4 *(Optică).* Într-un telescop este folosită o oglindă sferică (concavă) cu o rază de curbură $R = 2{,}00$ m. În focarul principal al oglinzii se găsește un receptor de radiații sub forma unui disc rotund. Discul este așezat perpendicular pe axa optică a telescopului.

Cît de mare trebuie să fie receptorul, pentru ca el să capteze întreaga radiație reflectată de oglindă? Dimensiunea transversală a oglinzii (diametrul calotei sferice) este $2a = 50$ cm.

De cîte ori se micșorează radiația înregistrată de receptor, dacă dimensiunile sale se reduc de opt ori?

Observații:

a) În calcule, pentru x mic, se poate folosi aproximația

$$\sqrt{1 - x^2} \cong 1 - x^2/2.$$

b) Se neglijează difracția.

Lucrarea experimentală *(optică).* Pe masă se află trei lentile diferite, banc de măsură, un ecran cu imaginea unei figuri geometrice și fire reticulare ortogonale. Ultimele două obiecte sînt fixate pe suporți.

Să se determine numai cu ajutorul acestor obiecte distanțele focale ale lentilelor și semnul distanțelor focale.

Totodată se cere:

a) Să se indice cel puțin două procedee de măsură a distanțelor focale și pentru fiecare procedeu să se indice schema poziției aparatelor și drumul razelor în montajul experimental.

b) Să se justifice teoretic calculele și să se deducă ecuațiile de lucru necesare.

c) Să se efectueze măsurătorile cu toate procedeele găsite și din valorile măsurate să se calculeze distanțele focale.

d) Să se întocmească un referat asupra lucrării efectuate.

A V-a
Olimpiadă internațională de fizică
1971, Sofia, R. P. Bulgaria

Problema 1 *(Mecanică).* Pe o pană netedă (dublu plan înclinat) cu secțiune triunghiulară, de masă M, sînt așezate două corpuri cu masele m_1, m_2, legate între ele printr-un fir inextensibil. Firul trece peste un scripete fixat pe muchia prismei (unghiului diedru). Unghiurile (interioare) de la baza panei ale celor două plane înclinate, față de orizotnală, sînt α_1, α_2. Masa firului și masa scripetelui sînt neglijabile, la fel ca și momentul de inerție al scripetelui. Inițial, întregul sistem se află în repaus pe planul orizontal. După aceea sistemul este lăsat liber.

Să se calculeze accelerația panei, dacă sistemul se mișcă numai sub acțiunea forțelor de greutate.

Scanned with OKEN Scanner

Să se exprime acceleraţiile relative ale celor două corpuri faţă de pană prin acceleraţia panei.

Ce relaţie trebuie să existe între masele m_1, m_2 pentru ca pana să rămînă în repaus, iar cele două corpuri să lunece pe ea?

Toate frecările sînt neglijabile.

Problema 2 *(Termodinamică).* Un vas conţine aer la temperatura 0°C şi presiunea $p_0 = 1{,}334 \cdot 10^5$ N/m². În vas se află un tub de sticlă vertical cu secţiunea transversală $S = 1{,}00$ cm². Capătul superior al tubului este închis, iar cel inferior este introdus într-o cuvă (deschisă) cu mercur. Nivelul mercurului din tub are înălţimea $h_0 = 700$ mm deasupra nivelului orizontal al mercurului din cuvă. Restul tubului conţine hidrogen. Deplasînd un perete al vasului, presiunea aerului scade izoterm pînă la $p_1 = 8{,}00 \cdot 10^4$ N/m², ceea ce face ca coloana de mercur din tub să ia valoarea $h_1 = 400$ mm. Încălzind după aceea vasul la volum constant, temperatura creşte pînă la T_2, iar înălţimea coloanei de mercur devine $h_2 = 500$ mm. După aceasta se face o destindere izobară a aerului din vas, astfel încît înălţimea coloanei de mercur devine $h = 450$ mm.

Admiţînd că sistemul considerat se află mereu în echilibru termodinamic, să se calculeze:

a) Masa de hidrogen.

b) Temperatura T_2.

c) Presiunea hidrogenului în starea finală.

Densitatea mercurului la temperatura de 0°C este $\rho_0 = 13{,}6 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3$; coeficientul de dilatare în volum al mercurului, $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{K}^{-1}$; constanta gazelor ideale $R = 8{,}314 \cdot 10^3$ J/kmol·K.

Dilatarea termică a sticlei şi variaţia nivelului mercurului din cuvă sînt neglijabile.

Observaţie. Dacă ΔT este diferenţa maximă de temperatură între stările sistemului, atunci se poate presupune că $\beta \Delta T = x \ll 1$ şi se poate folosi aproximaţia:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x.$$

Problema 3 *(Electricitate).* În schema din figura II.8, E_1, E_2, E_3 şi E_4 sînt surse de tensiune continuă. Rezistoarele din schemă au toate aceeaşi rezistenţă R, iar rezistenţele interne ale surselor de tensiune sînt neglijabile.

Să se calculeze energia $W = \frac{1}{2} CU^2$ necesară pentru încărcarea condensatoarelor C_1, C_2, C_3 şi C_4.

Să se calculeze sarcina condensatorului C_2 dacă punctele H şi B sînt scurtcircuitate.

Valori numerice: $E_1 = 4{,}0$ V, $E_2 = 8{,}0$ V, $E_3 = 12{,}0$ V, $E_4 = 16{,}0$ V; $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1{,}00$ μF.

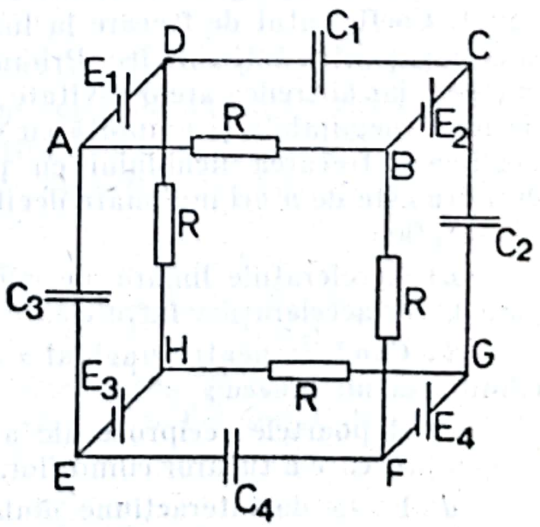


Fig. II.8.

Problema 4 *(Optică).* În faţa unei oglinzi plane verticale se află un acvariu de formă sferică din sticlă subţire, umplut cu apă. Raza acvariului este R,

iar distanța dintre centrul său și oglindă este 3 R. Un observator aflat la distanță foarte mare în fața acvariului privește într-o direcție care trece prin centrul acvariului și este perpendiculară pe oglinda plană. În punctul acvariului, diametral opus față de observator (cel mai depărtat de ochiul observatorului) se află un peștișor mic, care începe să se deplaseze vertical de-a lungul peretelui cu o viteză dată v.

Cu ce viteză relativă se vor îndepărta una de alta, în momentul inițial, imaginile peștelui văzute de observator ?

Indicele de refracție al apei : $n = 4/3$.

Lucrarea experimentală *(Electricitate)*. Se dau :

O sursă de tensiune electromotoare, un ampermetru, un voltmetru, un reostat și conductoare pentru conexiuni.

Să se realizeze un montaj cu sursa și aparatele date și să se facă măsurătorile care să permită trasarea grafică a puterii utile P, dezvoltată în reostat, în funcție de intensitatea curentului I.

Folosind datele din graficul obținut :

a) Să se calculeze rezistența internă r a sursei de curent.

b) Să se calculeze tensiunea electromotoare a sursei.

c) Să se reprezinte grafic puterea utilă P în funcție de rezistența externă R.

d) Să se reprezinte grafic puterea totală P_1 în funcție de rezistența externă R.

e) Să se reprezinte grafic randamentul η al sursei în funcție de rezistența externă R.

Observație. Graficul principal care reprezintă puterea utilă în funcție de intensitatea curentului trebuie construit folosind cel puțin 30—35 puncte.

A VI-a

Olimpiadă internațională de fizică

1972, București, R. S. România

Problema 1 *(Mecanică)*. Trei cilindri de aceeași masă, de aceeași lungime și de aceeași rază exterioară sînt așezați inițial în repaus pe un plan înclinat. Coeficientul de frecare la lunecare μ pe planul înclinat este cunoscut și același pentru toți cilindrii. Primul cilindru este gol (tub), al doilea este plin omogen, iar al treilea are o cavitate exact ca la primul, dar astupată cu capace de masă neglijabilă și umplută cu un lichid de aceeași densitate ca pereții. Se neglijează frecarea lichidului cu pereții. Densitatea materialului primului cilindru este de n ori mai mare decît a celui de al doilea sau al treilea cilindru. Să se afle :

a) Accelerațiile liniare ale cilindrilor în cazul nealunecării. Să se compare toate accelerațiile între ele.

b) Condiția pentru unghiul α al planului înclinat astfel ca nici unul din cilindri să nu lunece ;

c) Rapoartele reciproce ale accelerațiilor unghiulare în cazul rostogolirii cu lunecare a tuturor cilindrilor. Să se compare aceste accelerații între ele.

d) Forța de interacțiune dintre lichid și pereți în cazul lunecării respectivului cilindru, cunoscînd masa lichidului m_l.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 2 *(Fizică moleculară).* Doi cilindri A și B cu diametre egale au pistoane de mase neglijabile cu tijă comună și se pot mișca liber. Tija este un tub scurt prevăzut cu un robinet care inițial este închis (fig. II.9).

Cilindrul A împreună cu pistonul este izolat adiabatic, iar cilindrul B se găsește în contact cu un termostat ce are temperatura $\theta = 27°C$.

Inițial pistonul cilindrului A este fixat și în cilindru se găsește o masă $m = 32$ kg de argon la o presiune mai mare decît presiunea atmosferică. În cilindrul B se află o cantitate de oxigen la presiunea atmosferică normală.

Lăsat liber, pistonul cilindrului A se mișcă suficient de lent (cvasistatic) și la echilibru se constată că volumul gazului a crescut de opt ori, iar în cilindrul B densitatea oxigenului a crescut de două ori. Știind că termostatului i-a fost cedată o cantitate de căldură $Q' = 747{,}9 \cdot 10^4$ J, se cere:

a) Să se stabilească pe baza teoriei cinetice a gazelor, studiind ciocnirile elastice ale moleculelor cu pistonul, că ecuația termică a procesului ce are loc în cilindrul A este $TV^{2/3} = \text{const.}$

b) Să se determine parametrii p, V, T ai argonului în stările inițială și finală.

c) Deschizînd robinetul care separă cei doi cilindri, să se calculeze presiunea finală a amestecului de gaze.

Se dă $\mu = 40$ kg/kmol pentru argon.

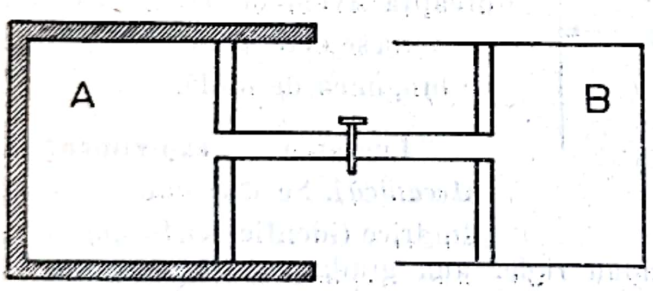


Fig. II.9.

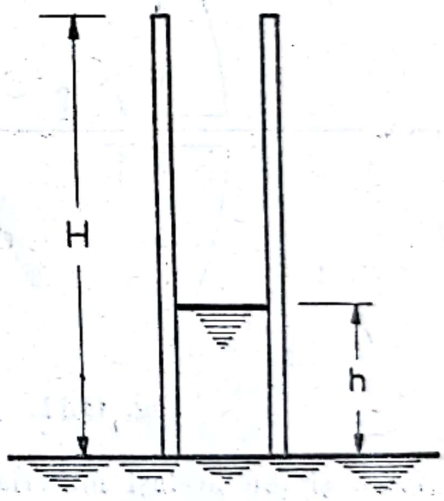


Fig. II.10.

Problema 3 *(Electricitate).* Un condensator plan cu plăcile dreptunghiulare încărcat electric este așezat în poziție verticală avînd partea inferioară în contact cu un lichid dielectric (fig. II.10).

Să se determine înălțimea la care se ridică lichidul între plăci și să se explice fenomenul.

Se neglijează efectele de capilaritate.

Se presupune că distanța dintre plăci este mult mai mică în comparație cu dimensiunile liniare ale plăcilor.

Se dau: intensitatea cîmpului electric inițial E al condensatorului încărcat, densitatea ρ, permitivitatea relativă ε_r a lichidului, înălțimea H a plăcilor condensatorului.

Discuție.

Problema 4 *(Optică).* O lentilă subțire planconvexă cu diametrul $2r$, raza de curbură R și indicele de refracție n_0 este astfel așezată, încît în stînga sa se află aer ($n_1 = 1$), iar în dreapta sa un mediu transparent cu indicele de refracție $n_2 \neq 1$. Fața convexă a lentilei este îndreptată spre aer. În aer, la distanța s_1 de lentilă, măsurată pe axa optică principală, se găsește o sursă punctiformă de lumină monocromatică.

a) Să se demonstreze, folosind aproximația Gauss, că între poziția imaginii, dată de distanța s_2 pînă la lentilă, și poziția sursei de lumină, există relația

$$\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1,$$

unde f_1, f_2 sînt distanțele focale ale lentilei, în aer, respectiv în mediul cu indicele de refracție n_2.

Observație. Toți indicii de refracție sînt absoluți.

b) Lentila este tăiată perpendicular pe fața sa plană în două părți egale. Aceste părți sînt depărtate între ele pînă la o distanță $\delta \ll r$ (bilentila Billet). Pe axa de simetrie a sistemului astfel obținut se așază la distanța s_1 ($s_1 > f_1$) o sursă punctiformă de lumină (fig. II.11). În dreapta sistemului se află la distanța d un ecran E. El este așezat paralel cu fața plană a lentilei. Pe acest ecran se produc N franje de interferență, dacă în dreapta avem de asemenea aer.

Să se determine N în funcție de lungimea de undă.

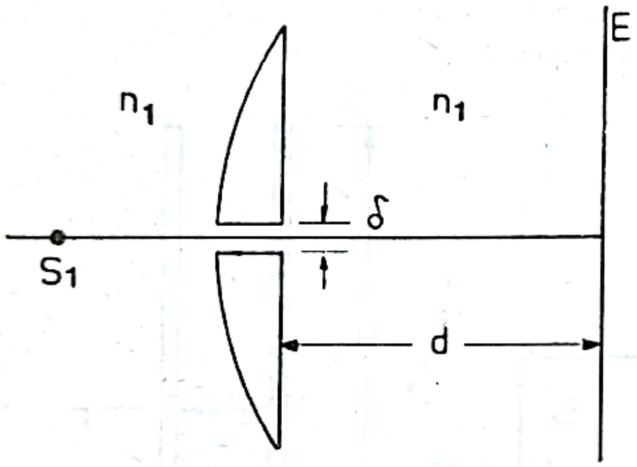


Fig. II.11.

Lucrarea experimentală *(Mecanică).* Se dau două corpuri cilindrice (identice ca formă exterioară și din același material), două rigle, una gradată și alta negradată, și un vas cu apă.

Se știe că unul din corpuri este omogen, iar celălalt are o cavitate interioară cu următoarele caracteristici:

— este de formă cilindrică;

— are axa paralelă cu a corpului;

— lungimea ei este practic egală cu cea a corpului.

Să se determine experimental și să se justifice teoretic:

a) Densitatea materialului din care sînt construite corpurile.

b) Raza cavității cilindrice.

c) Distanța dintre axa cavității și a corpului cilindric.

d) Indicați sursele de erori și apreciați care dintre ele influențează mai mult asupra rezultatelor finale.

Scrieți toate variantele de rezolvare pe care le-ați găsit.

Notă. În anul 1973 nu s-a ținut olimpiada internațională de fizică.

Scanned with OKEN Scanner

A VII-a

Olimpiadă internațională de fizică

1974, Varșovia, R. P. Polonă

Problema 1 *(Mecanică și Fizică atomică).* Cu un atom de hidrogen aflat în repaus, în stare fundamentală, se ciocnește un atom identic de hidrogen, care se mișcă cu viteza v.

Folosind modelul lui Bohr, să se determine viteza limită (critică) v_0, sub care ciocnirea atomilor este elastică.

După atingerea vitezei v_0, ciocnirile dintre atomi pot fi neelastice, fiind însoțite de o emisie de fotoni.

Să se determine diferența dintre cele două frecvențe ale radiației observate în cele două sensuri ale direcției de mișcare a atomului incident, și să se exprime această diferență în procente din media aritmetică a celor două frecvențe.

Energia de ionizare a atomului de hidrogen :

$$E_i^* = \frac{me^4}{2\hbar^2} = \frac{2\pi^2 mc^4}{h^2} = 13{,}6 \text{ eV} = 2{,}18 \cdot 10^{-18} \text{ J}.$$

Masa atomului de hidrogen : $m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Problema 2 *(Optică).* Pe o lamă plan-paralelă al cărei indice de refracție variază după legea

$$n = \frac{n_A}{1 - \frac{x}{R}},$$

cade în punctul A de coordonată $x = 0$, perpendicular pe placă, un fascicul îngust și paralel de lumină. Fasciculul părăsește placa în punctul B sub unghiul α față de direcția inițială (fig. II.12).

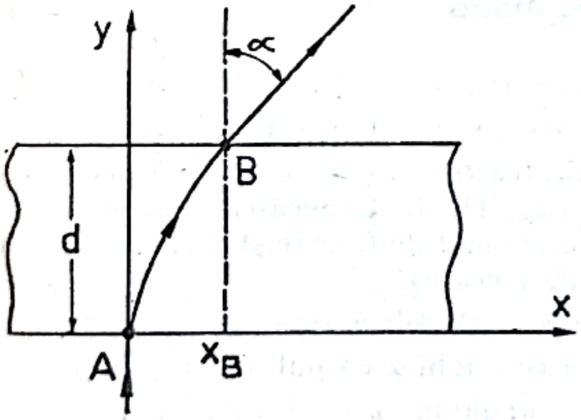


Fig. II.12.

a) Să se determine indicele de refracție n_B din punctul B în care fasciculul părăsește placa.

b) Să se determine coordonata x_B a punctului B.

c) Să se determine grosimea d a plăcii.

Date numerice : $n_A = 1{,}2$, $R = 13$ cm, $\alpha = 30°$.

Problema 3 *(Termodinamică).* O expediție științifică, aflată pe o insulă nelocuită, a epuizat rezervele sale de energie. Pe insulă nu sînt vînturi, nu curg rîuri, cerul este acoperit cu un strat gros de nori, presiunea atmosferică este constantă, iar temperatura atmosferei și apei din oceanul înconjurător, foarte liniștit, este ziua și noaptea aceeași. Pe insulă a fost descoperit un izvor de gaz chimic neu-

* În enunțul problemei formula energiei de ionizare s-a dat în sistemul C.G.S. În S.I. avem $E_i = \frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$.

tru (inactiv), care se degajă cu viteză (debit) constantă dintr-o peşteră. Gazul se degajă sub o presiune şi la o temperatură, egale cu presiunea atmosferică şi respectiv cu temperatura mediului ambiant (atmosferei).

Membrii expediţiei dispun de două pelicule semipermeabile, din care una B_1 lasă să treacă liber moleculele de gaz, dar opreşte complet moleculele de aer, iar cealaltă B_2, dimpotrivă, lasă moleculele de aer, dar opreşte moleculele de gaz. În afară de aceasta expediţia are posibilitatea de a construi dispozitive mecanice simple, de tipul unor cilindri cu piston sau ventile (supape) şi membrii expediţiei au hotărît să construiască un motor.

Să se demonstreze că teoretic nu există o limită pentru puterea unui motor ideal care să funcţioneze utilizînd acest gaz.

Lucrarea experimentală *(Electricitate).* În cutie se află două diode semiconductoare identice şi un rezistor, conectate într-un circuit nu prea complicat.

Folosind aparatele date, să se determine rezistenţa rezistorului.

Se dau următoarele aparate:

Două aparate de măsură pentru tensiune şi curent (aparatele care au şi ohmmetru nu se vor folosi ca ohmmetre, ci numai ca voltmetre şi ampermetre), baterie, reostat cu cursor, conductoare de conexiune, hîrtie milimetrică.

Indicaţie. Se presupune că în condiţiile experienţei diodele conduc curentul doar într-un singur sens.

A VIII-a
Olimpiadă internaţională de fizică
1975, Güstrow, R. D. Germană

Problema 1 *(Mecanică).* Pe o axă verticală A este fixată lateral o tijă sub un unghi $\pi/2 - \alpha$. Sistemul se poate roti în jurul axei A cu viteza unghiulară ω. Pe tijă se află un corp cu greutatea $G = mg$ care poate luneca de-a lungul tijei (fig. II.13). Lunecarea se face cu frecare cu un coeficient de frecare statică μ ($\mu = \operatorname{tg} \beta$, β = unghi de frecare).

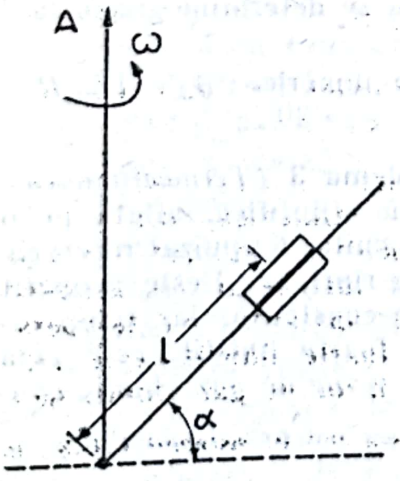


Fig. II.13.

a) Fie $\omega = 0$, adică sistemul nu se roteşte. Pentru ce unghi α corpul se află în repaus şi pentru ce unghiuri α el se află în mişcare ?

b) Sistemul se roteşte cu viteză unghiulară constantă ω. În timpul rotaţiei unghiul α rămîne constant.

Pentru ce poziţii corpul se află în repaus faţă de tijă ?

Se vor folosi în calcule următoarele relaţii:

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$,

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 2 *(Optică).* Pentru o lentilă groasă de sticlă (cu indicele de refracție n) în aer, cu razele de curbură r_1 și r_2 și grosimea d (fig. II.14), distanța focală f este dată de următoarea expresie :

$$f = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2-r_1)+d(n-1)]}.$$

Observație. $r_i > 0$ înseamnă : centrul de curbură M_i se află în dreapta punctului (vîrfului) S_i ; $r_i < 0$ înseamnă : centrul de curbură M_i se află în stînga punctului S_i, $(i = 1,2)$.

Pentru anumite aplicații este de dorit ca distanța focală să fie independentă de lungimea de undă λ.

a) Pentru cîte lungimi de undă diferite se poate obține aceeași distanță focală ?

b) Să se stabilească o relație între r_i, d și indicii de refracție, pentru care este îndeplinită condiția cerută de independență de lungimea de undă și să se discute această relație.

Să se deseneze o formă posibilă a lentilei. Să se indice poziția centrelor de curbură M_1, M_2.

c) Să se arate că pentru o lentilă plan-convexă se poate obține o distanță focală determinată numai pentru o singură lungime de undă.

d) Să se dea pentru alte două cazuri condițiile pentru parametrii lentilei groase, pentru care se poate realiza o distanță focală determinată numai cu o singură lungime de undă.

Se va lua în considerație aspectul fizic și geometric al problemei.

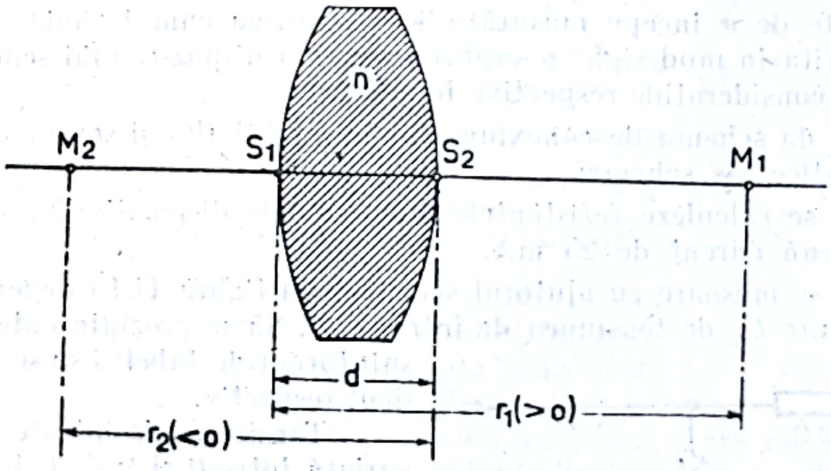


Fig. II.14.

Problema 3 *(Electricitate* și *fizica atomică).* Să se rezolve următoarea problemă plană de optică a ionilor :

Dintr-un punct Q pornește în planul desenului un fascicul divergent de ioni încărcați cu o singură sarcină elementară pozitivă $(+e)$ și de aceeași masă constantă m. Ei au fost accelerați de o tensiune U. Ionii sînt deviați de un cîmp magnetic omogen de inducție B orientat perpendicular pe planul desenului de jos în sus. Frontierele cîmpului magnetic trebuie realizate astfel, încît fasciculul de ioni, inițial divergent, să devină convergent într-un punct A

($QA = 2a$). Traiectoriile ionilor trebuie să fie simetrice față de mediatoarea segmentului QA.

Dintre frontierele posibile ale cîmpului magnetic se vor considera numai acelea pentru care un cîmp magnetic continuu (simplu conex) acționează în vecinătatea mediatoarei și punctele Q, A se află în afara cîmpului.

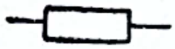
a) Să se găsească raza de curbură R a traiectoriilor ionilor în cîmpul magnetic în funcție de tensiunea U și inducția B.

b) Să se stabilească proprietățile caracteristice ale traiectoriilor ionilor în aranjamentul descris mai sus.

c) Să se obțină frontierele cîmpului magnetic cu ajutorul unei construcții geometrice în cazurile : $R < a$, $R = a$, $R > a$.

d) Să se deducă ecuația generală pentru frontiera cîmpului magnetic.

Lucrarea experimentală *(Electricitate)*. Pe masa de lucru se află următoarele :

— element (dispozitiv) semiconductor (de culoare roșie) ;
— reostat 140 Ω. ;
— rezistor (de culoare verde) 300 Ω  ;
— sursă de tensiune 9 V ;
— două voltampermetre (nu se vor folosi ca ohmmetre) ;
— conductoare de conexiune.

Cu ajutorul acestora să se rezolve următoarele teme :

a) Să se ridice caracteristica curent-tensiune a dispozitivului semiconductor în limitele determinate de puterea maximă (disipată) admisibilă de 250 mW. Se vor trece datele obținute într-un tabel și se va trasa caracteristica curent-tensiune.

Înainte de a începe măsurătorile, gîndiți-vă cum trebuie să procedați pentru a evita în mod sigur o supraîncărcare a dispozitivului semiconductor și expuneți considerațiile respective în referat.

Se va da schema de conexiune a montajului ales și se vor discuta erorile sistematice ale schemei.

b) Să se calculeze rezistențele dinamice ale dispozitivului semiconductor pentru un curent de 25 mA.

c) Să se măsoare cu ajutorul schemei din figura II.15 dependența tensiunii de ieșire U_2 de tensiunea de intrare U_1. Să se prezinte datele obținute sub formă de tabel și să se traseze graficul respectiv.

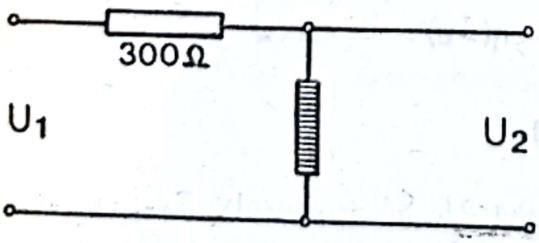


Fig. II.15.

Tensiunea de intrare U_1 trebuie variată între 0 și 9 V. Totodată dispozitivul semiconductor trebuie astfel conectat în schemă, încît U_2 să fie cît mai mare posibil.

Să se dea schema de conexiune completă în referat și să se comenteze rezultatul măsurătorilor.

d) Să se indice cu cît variază tensiunea de ieșire U_2 în acest montaj, dacă tensiunea de intrare U_1 variază de la 7 la 9 V.

Să se explice din punct de vedere calitativ raportul $\Delta U_1/\Delta U_2$.

e) De ce tip este dispozitivul semiconductor folosit în experiență ? Să se dea un exemplu de aplicație practică a schemei indicate în figură.

Scanned with OKEN Scanner

Indicație. Aparatele de măsură pot fi folosite numai ca voltmetre sau numai ca ampermetre. Se va lucra cu grijă pentru a nu le strica. Ele aparțin clasei de precizie 2,5% și au caracteristicile indicate mai jos:

Domeniul de măsură	*Rezistența internă*
50 μA	2 kΩ
300 μA	1 kΩ
3 mA	100 Ω
30 mA	10 Ω
300 mA	1 Ω
0,3 V	6 kΩ
1 V	20 kΩ
3 V	60 kΩ
10 V	200 kV

A IX-a

Olimpiadă internațională de fizică

1976, Budapesta, R. P. Ungară

Problema 1 *(Mecanică).* O sferă goală cu raza $R = 0{,}50$ m se rotește cu o viteză unghiulară constantă $\omega = 5{,}0\ s^{-1}$ în jurul diametrului său vertical. În interiorul sferei, la o înălțime egală cu jumătate din raza sa se rotește împreună cu sfera un mic corp (fig. II.16) ($g \cong 10\ m/s^2$).

a) Care trebuie să fie valoarea coeficientului de frecare pentru ca să fie posibilă această stare?

b) Care trebuie să fie valoarea coeficientului de frecare dacă viteza unghiulară este $\omega = 8{,}0\ s^{-1}$?

c) Să se analizeze stabilitatea stărilor de mai sus cu coeficienții de frecare calculați, dacă:

α) poziția corpului se schimbă puțin,

β) viteza unghiulară a sferei se schimbă puțin.

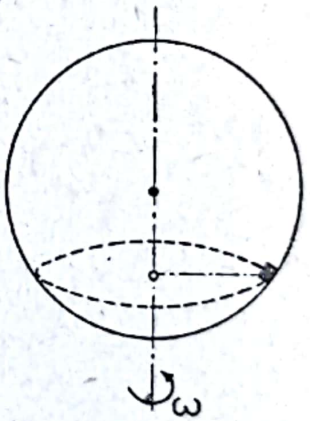


Fig. II.16.

Problema 2 *(Termodinamică).* Un cilindru avînd pereții, pistonul și peretele interior despărțitor confecționați din material termoizolant, are aria bazei $S = 1{,}00\ dm^2$. Supapa din peretele despărțitor se deschide dacă presiunea din partea dreaptă este mai mare decît presiunea din partea stîngă. Inițial în partea stîngă, de lungime $l = 11{,}2$ dm se află $m_1 = 12{,}0$ g de heliu, iar în partea dreaptă de lungime $l = 11{,}2$ dm se află $m_2 = 2{,}00$ g heliu (fig. II.17), temperatura fiind 0°C în ambele

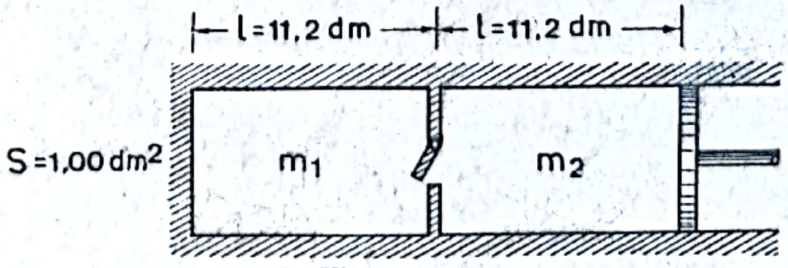


Fig. II.17.

părți (compartimente). Presiunea aerului din exterior este $H = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa. Căldura specifică la volum constant este $c_v = 3{,}15$ J/g·K și la presiune constantă $c_p = 5{,}25$ J/g·K.

Împingem pistonul încet către peretele despărțitor. Cînd supapa se deschide, oprim puțin pistonul și apoi îl împingem încet pînă la peretele despărțitor.

Ce lucru mecanic am efectuat noi?

Problema 3 *(Optică).* Într-o sferă de sticlă se află undeva o bulă sferică de aer. Să se inventeze metode de determinare a diametrului bulei de aer. Este interzis de a se sparge sfera. Să se descrie metodele cît mai detaliat posibil.

Lucrarea experimentală *(Căldură).* Pe masa de lucru se găsesc, printre alte instrumente ajutătoare, următoarele:

— o eprubetă care poate fi încălzită cu o tensiune de alimentare de 12 V;

— un lichid avînd căldura specifică cunoscută $c_0 = 2\,100$ J/kg·K;

— o substanță X cu proprietățile termice necunoscute. Substanța X este insolubilă în lichid.

Să se studieze proprietățile termice ale substanței cristaline X în intervalul de temperatură de la temperatura camerei pînă la 70°C și să se determine parametrii termici caracteristici ai substanței X.

Rezultatele măsurătorilor trebuie prezentate sub formă de tabel precum și sub formă grafică.

Trebuie utilizate numai instrumentele și substanțele pregătite pe masă. Instrumentele stricate și substanțele consumate nu pot fi înlocuite.

Scanned with OKEN Scanner

I

Probele de selecție ale lotului olimpic al R. S. România

1971

1.1. Este comod să trecem la un sistem de coordonate neinerțial legat de plan. În acest caz, pe lîngă forțele reale, de interacțiune, exercitate de mediul ambiant asupra sistemului considerat, trebuie introdusă forța complementară sau forța de inerție (pseudoforța). Atît timp cît corpul se mișcă încă solidar cu planul înclinat, sistemul de coordonate neinerțial legat de plan este totodată sistem de referință propriu al corpului (adică legat rigid de corp).

În sistemul de coordonate propriu forța complementară sau de inerție este

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}, \tag{1}$$

unde m este masa corpului și $\vec{a}$ accelerația sa într-un sistem de referință inerțial (reamintim că accelerația unui corp este aceeași față de toate sistemele de referință inerțiale, deoarece aceste sisteme se mișcă unele față de altele rectiliniu uniform, adică fără accelerație).

În cazul problemei noastre considerăm cazul limită cînd corpul este gata să lunece. Atunci forța de frecare este

$$F_f = \mu N, \tag{2}$$

unde N este reacțiunea normală a planului.

Conform condiției din problemă accelerația este paralelă cu planul înclinat, deci forța de inerție este conținută în planul înclinat.

Asupra corpului acționează 4 forțe : greutatea $m\vec{g}$, reacțiunea normală $\vec{N}$, forța de frecare $F_f = \mu N$ și forța de inerție $\vec{F}_c$ (fig. I.1. *R*). Rezultanta acestor 4 forțe trebuie să fie nulă, corpul fiind încă în echilibru față de planul înclinat.

Proiectînd forțele pe normala la plan, avem

$$N - mg\cos\alpha = 0, \quad N = mg\cos\alpha, \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

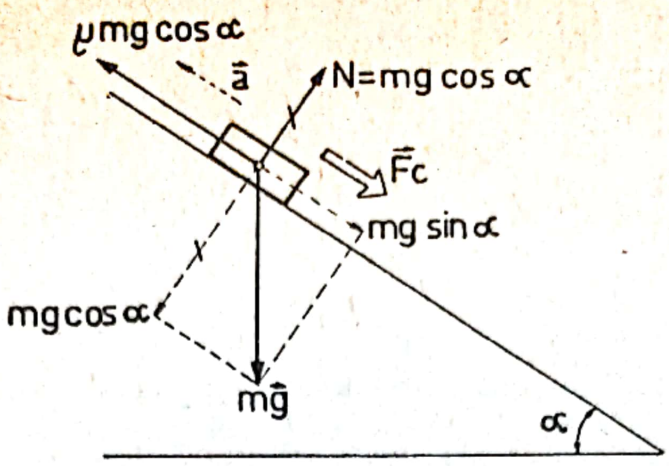


Fig. I.1, R.

deci forţa de frecare (maximă)

$$F_f = \mu N = \mu mg \cos \alpha \tag{4}$$

nu depinde de mişcarea oscilatorie a planului.

Problema se reduce acum la următoarele trei forţe : $m\vec{g}$ sin α, $\mu m\vec{g}$ cos α şi $\vec{F}_c$, toate conţinute în planul înclinat.

Dacă compunem $m\vec{g}$ sin α cu $\mu m\vec{g}$ cos α, rezultanta acestora trebuie să fie echilibrată de $\vec{F}_c$. Pentru ca $\vec{F}_c$ să fie minimă, trebuie ca acea rezultantă să fie minimă. Rezultanta este minimă cînd $\mu m\vec{g}$ cos α este de sens opus cu $m\vec{g}$ sin α. Cum corpul, înainte de mişcarea planului, nu lunecă, înseamnă că $mg \sin \alpha < \mu mg \cos \alpha$, deci forţa de inerţie trebuie să fie în sensul lui $m\vec{g}$ sin α :

$$mg \sin \alpha + F_c - \mu mg \cos \alpha = 0,$$

$$F_c = mg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha). \tag{5}$$

Dar evident forţa de inerţie nu este constantă în cazul nostru :

$$F_c = -ma = mA\omega^2 \sin \omega t = m\omega^2 x = kx, \tag{6}$$

de aceea numai cînd sin $\omega t = 1$, adică o dată pe perioadă cînd F_c este maxim (simultan cu x), se atinge condiţia de lunecare. Şi anume, cînd planul este tras în jos şi este oprit la elongaţia maximă, în acel moment corpul, în virtutea inerţiei, tinde să lunece în jos şi forţa de inerţie se adaugă la mg sin α şi învinge forţa de frecare μmg cos α.

Acum din (5—6) rezultă

$$mA\omega^2 = mg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha),$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}. \tag{7}$$

Deoarece $\alpha = 0{,}10$ rad $\ll 1$ rad ($\alpha = 5{,}7° < 6°$), putem face aproximaţia

$$\cos \alpha \cong 1, \quad \sin \alpha \cong \alpha \text{ (rad)}, \qquad (\alpha < 6°). \tag{8}$$

Atunci

$$\nu \cong \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}(\mu - \alpha)} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{4{,}9\cdot 10^{-2}\text{m}}(0{,}28 - 0{,}10)} = \frac{3}{\pi} \approx 0{,}96\ \text{Hz}. \quad (9)$$

Rezolvarea de mai sus poate fi urmărită grafic în figura I.2, *R*. Componenta $mg \sin \alpha$ este dată ($\overrightarrow{OA}$), forța de frecare $\mu mg \cos \alpha$ este dată ca modul, deci vîrful vectorului respectiv se găsește pe un cerc de rază $\mu mg \cos \alpha$. Forța complementară (de inerție) $\vec{F}_c$ compusă cu $m\vec{g} \sin \alpha$ trebuie să echilibreze forța de frecare, deci trebuie să dea o rezultantă cu vîrful pe cerc. Din figura I.2, *R* se vede că forță complementară $\overrightarrow{OB}$ este echipolentă cu $\overrightarrow{AC}$, care ia valoare minimă dacă este în prelungire cu $\overrightarrow{OA}$, adică este $\overrightarrow{AD}$, ceea ce am găsit și mai înainte.

1.2. Dacă cilindrul se rostogolește fără lunecare, punctul său de contact cu planul înclinat este mereu în repaus și firul, întins de-a lungul planului, nu lunecă pe plan, deci corpul *M* stă pe loc. Atunci tensiunea din fir $\vec{T}$ echilibrează greutatea $M\vec{g}$:

$$T = Mg. \quad (1)$$

Forțele care acționează asupra cilindrului sînt (fig. I.3, *R*) : greutatea $m\vec{g}$, tensiunea din fir $\vec{T}$, reacțiunea normală a planului $\vec{N}$ și forța de frecare $\vec{F}_f$.

Pentru mișcarea centrului de masă al cilindrului ecuația $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ dă pe cele două direcții :

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - T - F_f &= ma, \\ N - mg \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

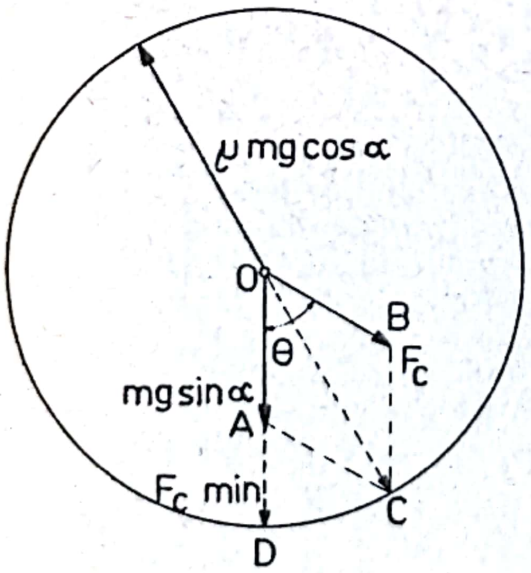


Fig. I.2, R.

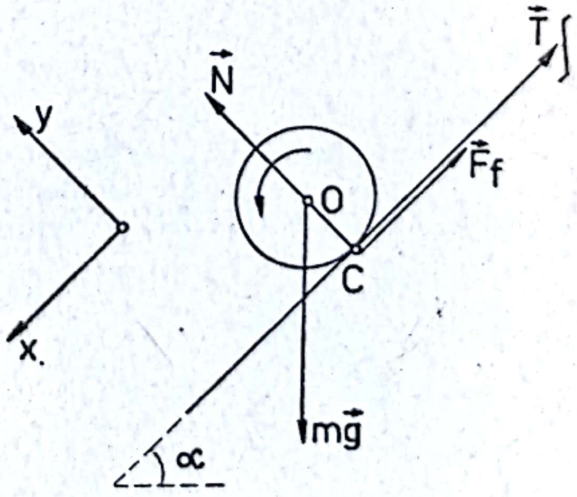


Fig. I.3, R.

Pentru mișcarea de rotație în jurul axei centrale (adică a axei care trece prin CM), ecuația $M = I\varepsilon$, (M — momentul forțelor în raport cu axa, I — momentul de inerție în raport cu aceeași axă, ε — accelerația unghiulară), dă (sensul pozitiv — sensul trigonometric) :

$$(T + F_f)R = I\varepsilon. \tag{3}$$

În cazul mișcării plan-paralele, cum este cazul în problema noastră, ecuația mișcării de rotație se poate scrie și față de axa instantanee de rotație pură (care trece prin punctul de contact C în cazul rostogolirii fără lunecare) :

$$M' = I'\varepsilon,$$

$$M' = mg\sin\alpha \cdot R = I'\varepsilon = (I + mR^2)\varepsilon, \tag{4}$$

unde am aplicat teorema lui Steiner : $I' = I + mR^2$; (5)
momentul de inerție I' față de o axă oarecare este egal cu momentul de inerție I față de o axă centrală paralelă cu axa dată, plus masa corpului înmulțită cu pătratul distanței dintre axe (mR^2). Se poate spune că *momentul de inerție I' față de o axă oarecare se descompune în momentul de inerție propriu sau de spin I, în jurul axei sale proprii (centrale) paralele cu cea dată, plus momentul de inerție orbital (sau extern) de mișcare globală a corpului ca un punct material m în centrul de masă* CM (mR^2).

La ecuațiile de mișcare scrise mai sus, se adaugă condiția de rostogolire *fără lunecare :*

$$a = \varepsilon R. \tag{6}$$

Rezolvînd ecuațiile obținute, găsim

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + I/mR^2} \quad (7); \qquad F_f = \frac{mg\sin\alpha}{1 + mR^2/I} - Mg. \tag{8}$$

Se vede că pentru un corp M de masă mare și unghiuri α mici, forța de frecare își poate schimba sensul (față de cel din figură).

Pentru ca cilindrul să se rostogolească fără lunecare, forța de frecare (8) trebuie să fie mai mică (în modul) decît forța de frecare la lunecare μN (maximă posibilă) :

$$|F_f| < \mu N, \tag{9}$$

$$\mu > \left| \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + mR^2/I} - \frac{M}{m\cos\alpha} \right|. \tag{10}$$

Aceasta este condiția cerută pentru coeficientul de frecare la lunecare, necesară pentru ca cilindrul să se rostogolească fără lunecare.

1.3. Aplicînd legile lui Kirchhoff pentru nodul A și ochiurile $ARBE_1A$, respectiv $ARBE_2A$, (fig. I.4, R) vom putea scrie :

$$I = I_1 + I_2 \tag{1}$$

$$E_1 = I_1 r_1 + IR \tag{2}$$

$$E_2 = I_2 r_2 + IR. \tag{3}$$

Din (2) și (3) se explicitează I_1 și I_2 :

$$I_1 = \frac{E_1 - IR}{r_1} \quad (4) \qquad \text{și } I_2 = \frac{E_2 - IR}{r_2}. \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

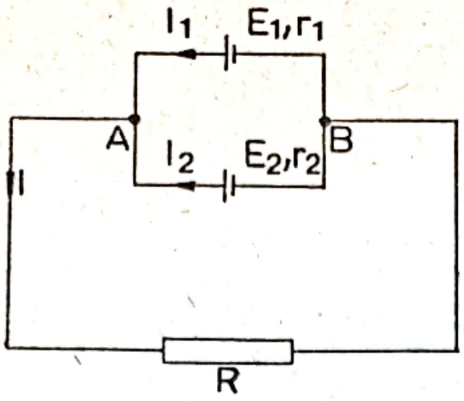


Fig. I.4, R.

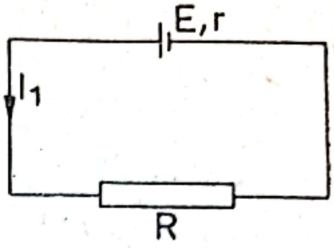


Fig. I.5, R.

Introducînd pe (4) și (5) în (1) avem :

$$I = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} = \frac{\dfrac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2}}{\dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + R}. \tag{6}$$

În cazul circuitului al doilea (fig. I.5, R) legea lui Ohm ne dă :

$$I = \frac{E}{R + r}. \tag{7}$$

Cum intensitățile prin R în cazul celor 2 circuite trebuie să fie egale, rezultă prin identificare :

$$E = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r_1 + r_2} \text{ și } r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

1.4. Forțele care acționează asupra bilei sînt (fig. I.6, R) : greutatea $m\vec{g}$, reacțiunea normală a semicilindrului $\vec{N}$ și forța de frecare $\vec{F}_f$.

a) Ecuația mișcării centrului de masă CM :

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}_{cm}, \tag{1}$$

proiectată pe direcția radială dă

$$N - mg \cos \alpha = ma_n = m \frac{v^2}{R - r}. \tag{2}$$

Deoarece nu avem lunecare, forța de frecare nu consumă lucru mecanic și atunci energia mecanică (cinetică + potențială) se conservă. Pornind din repaus, energia potențială scade cu cantitatea

$$mg(h_0 - h) = mg(R - r)(\cos \alpha - \cos \alpha_0), \tag{3}$$

transformîndu-se în energia cinetică a bilei, care se compune din energia cinetică de translație $\frac{1}{2} mv_{cm}^2$ și energia cinetică de rotație în jurul axei centrale $\frac{1}{2} I\omega^2$ (teorema lui S. König).

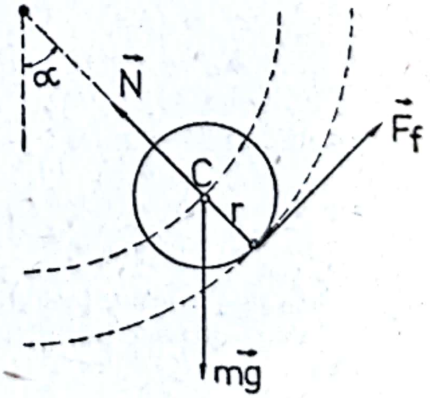


Fig. I.6, R.

În cazul mișcării plan-paralele, se poate scrie energia cinetică de rotație pură în jurul axei instantanee care trece prin punctul de contact al bilei cu cilindrul : $\frac{1}{2} I'\omega^2$. Conform teoremei lui Steiner :

$$I' = I + mr^2,$$

deci

$$E_c = \frac{1}{2} mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I'\omega^2 = \frac{1}{2} (I + mr^2)\omega^2, \tag{4}$$

ceea ce este în concordanță cu condiția de rostogolire fără lunecare

$$v_{cm} = v = \omega r.$$

Prin urmare, ecuația conservării energiei dă

$$mg(R - r)(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = \frac{1}{2} (I + mr^2) \frac{v^2}{r^2}. \tag{5}$$

Din (2) și (5) rezultă

$$N = mg \frac{(3 + I/mr^2) \cos \alpha - 2 \cos \alpha_0}{1 + I/mr^2}. \tag{6}$$

Ținînd seama de momentul de inerție al unei sfere omogene

$$I = \frac{2}{5} mr^2, \tag{7}$$

avem : $N = \frac{1}{7} mg(17 \cos \alpha - 10 \cos \alpha_0).$ (8)

Proiectînd ecuația (1) pe direcția tangentă la cerc, avem

$$mg \sin \alpha - F_f = ma_t = m\varepsilon r. \tag{9}$$

Ecuația mișcării de rotație față de CM : $F_f r = I\varepsilon$ (10)
sau față de punctul de contact : $mg \sin \alpha \cdot r = I'\varepsilon = (I + mr^2)\varepsilon.$ (11)
Din aceste ecuații rezultă forța de frecare :

$$F_f = \frac{mg \sin \alpha}{1 + mr^2/I}. \tag{12}$$

Pentru a nu avea lunecare trebuie ca $F_f < \mu N$.
b) Calculăm energia potențială și cinetică a bilei :

$$E_p = mg(R - r)(1 - \cos \alpha) = mg(R - r)\, 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \tag{13}$$

Pentru unghiuri α mici : $\sin \alpha \cong \alpha$, deci

$$E_p \cong \frac{1}{2} mg\, (R - r)\alpha^2. \tag{14}$$

Față de punctul de contact dintre bilă și cilindru avem în fiecare moment o rotație instantanee pură (fără translație) :

$$E_c = \frac{1}{2} I'\omega^2, \ \omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}, \ I' = I + mr^2, \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde θ este unghiul cu care s-a rotit bila. Pentru unghiuri α și θ foarte mici în jurul poziției de echilibru, avem

$$(R - r)\alpha \approx r\theta, \tag{16}$$

astfel încît energia potențială se poate retranscrie astfel:

$$E_p \approx \frac{1}{2} mg \frac{r^2}{R - r} \theta^2 = \frac{1}{2} k\theta^2. \tag{17}$$

Avînd coeficienții din energia potențială (k) și cinetică (I'), putem scrie perioada oscilațiilor mici (ca la oscilatorul armonic liniar):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} (R - r)(1 + I/mr^2)} = 2\pi \sqrt{\frac{7(R - r)}{5g}}. \tag{18}$$

Observație. Se poate judeca și astfel:

Accelerația tangențială a centrului bilei se poate scrie fie ca $a_t = \ddot{r\theta}$ (din rotația instantanee a bilei în jurul punctului de contact cu semicilindrul), fie ca $a_t = -(R - r)\ddot{\alpha}$ (ca mișcare circulară cu centrul pe axa semicilindrului). Atunci ecuația (9) devine:

$$mg \sin \alpha - F_f = -m(R - r)\ddot{\alpha} \tag{19}$$

și introducînd forța de frecare F_f din (12):

$$mg \sin \alpha \frac{1}{1 + I/mr^2} + m(R - r)\ddot{\alpha} = 0$$

sau

$$\ddot{\alpha} + \frac{g \sin \alpha}{(R - r)(1 + I/mr^2)} = 0. \tag{20}$$

Pentru unghiuri mici $\sin \alpha \approx \alpha$ și ecuația precedentă devine binecunoscuta ecuație a oscilatorului armonic, deci

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g}(R - r)(1 + I/mr^2)}. \tag{21}$$

c) În absența frecării, bila lunecă fără să se rotească, deci ca un punct material, și se comportă la oscilații ca un pendul simplu:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R - r}{g}}. \tag{22}$$

1.5. Pentru variații finite în jurul punctului de fierbere $\theta_f = 100°C$, $p = 1{,}00$ atm $= 760$ Torr, ecuația dată se scrie:

$$T_f \frac{\Delta p_s}{\Delta T} \approx \frac{\lambda}{v_v} = \lambda \rho_v, \quad (v_l \ll v_v). \tag{1}$$

Dar din ecuația de stare (valabilă aproximativ și pentru valori) rezultă densitatea vaporilor

$$\rho_v = \frac{p\mu}{RT}; \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

și ținînd seama de legea fierberii : $p_s = H$ (lichidul fierbe cînd presiunea vaporilor saturanți egalează presiunea exterioară atmosferică H), avem :

$$\Delta T = T_f \frac{\Delta p_s}{H} \frac{RT_f}{\lambda\mu} = 373 \text{ grd} \cdot \frac{2,7}{760} \frac{8,3 \cdot 10^3 \text{ (J/kmol·K)} \cdot 373 \text{ K}}{2,26 \cdot 10^6 \text{ (J/kg)} \cdot 18 \text{ kg/kmol}} \approx 0,10 \text{ grd.} \quad (3)$$

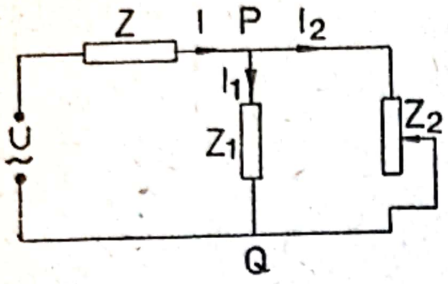


Fig. I.7, R.

1.6. Vom exprima mărimile alternative (fazoriale) în complex. Din figura I.7,*R* se poate deduce imediat :

$$I_1 Z_1 = I_2 Z_2 \quad (1)$$

$$\text{sau } \frac{I_1}{I_2} = \frac{Z_2}{Z_1} \quad (1')$$

$$\text{de unde } I_2 = I \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}. \quad (2)$$

Pe de altă parte, aplicînd legea lui Ohm pentru întreg circuitul, avem :

$$I = \frac{U}{Z + \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}. \quad (3)$$

Înlocuind pe (3) în (2) obținem :

$$I_2 = \frac{Z_1 U}{Z(Z_1 + Z_2) + Z_1 Z_2} = \frac{U}{Z + Z_2\left(1 + \frac{Z}{Z_1}\right)}. \quad (4)$$

Din analiza relației (4) rezultă că pentru ca I_2 să fie independent de Z_2 trebuie ca $1 + \frac{Z}{Z_1} = 0$ sau : $Z = -Z_1$. Dar acest lucru nu este posibil, în cazul dat, decît atunci cînd impedanțele sînt reactive : una capacitivă și alta inductivă (fig. I.8. *R*, *a* și *b*).

1.7. Lumina difuză poate pătrunde în lichid după diferite direcții de la $i = 0°$ la $i = 90°$. Pentru $i = 90°$ vom avea în lichid un unghi de refracție egal

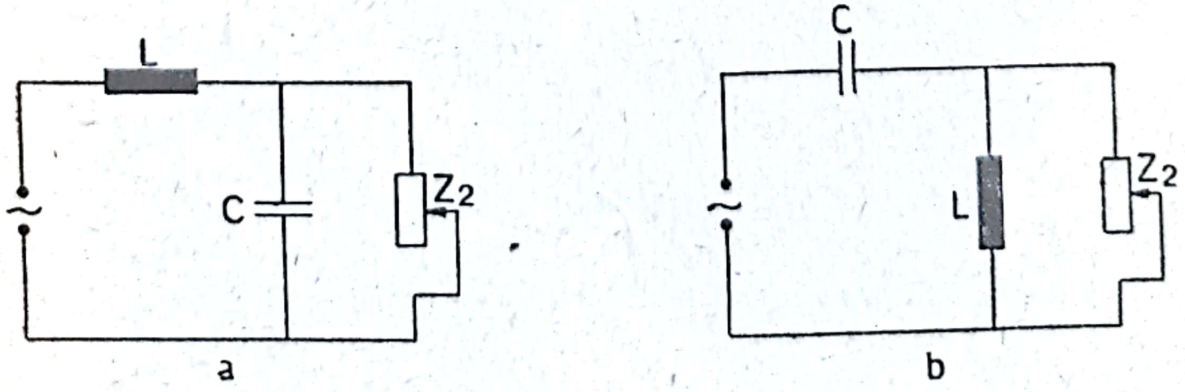


Fig. I.8, R.

cu unghiul limită (fig. I.9, *R*). Cum razele incidente vin din spațiu în toate direcțiile în jurul lui *NI*, fasciculul de raze din lichid formează un con cu generatoarea *IA* și înălțimea *h*. Pentru a afla pe *n* aplicăm legea refracției în *I*:

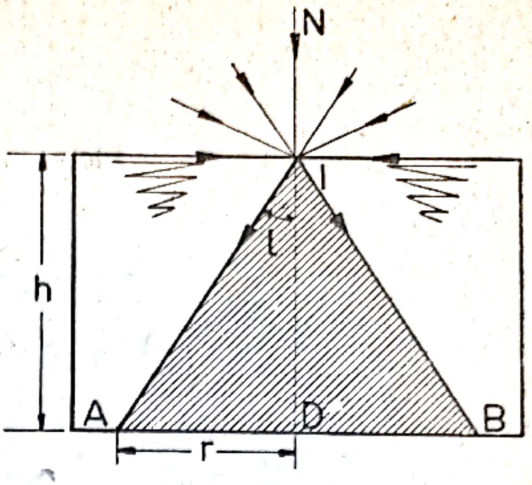


Fig. I.9, R.

$\sin i = n \sin r$; cum $i = 90°$ și $r = l$,

avem : $1 = n \cdot \sin l$

sau : $n = \frac{1}{\sin l}$.

Din triunghiul AID rezultă :

$$\sin l = \frac{r}{\sqrt{r^2 + h^2}}$$

așadar : $$n = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{r} = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2}.$$

1.8. *a)* Forțele care acționează asupra corpului de masă *m* și asupra tamburului sînt reprezentate în figura I.10, *R*.

Scripetele fiind ideal, tensiunea din fir de o parte și de alta a scripetelui este aceeași (scripetele ideal schimbă convenabil numai direcția forței).

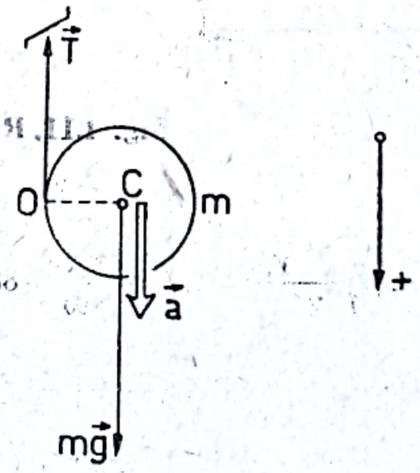


Fig. I.10, R.

Considerînd sensul pozitiv în jos, avem ecuațiile :
Pentru tambur :

$$mg - T = ma, \qquad TR = I\varepsilon ; \tag{1}$$

pentru corp :

$$mg - T = ma'. \tag{2}$$

Rezultă imediat : $a = a'$.

Față de centrul de masă C al tamburului firul urcă în sus cu accelerația $a' - (-a) = 2a$ care trebuie să coincidă cu accelerația tangențială periferică a tamburului $a_t = \varepsilon R$, deoarece firul nu lunecă pe tambur, deci

$$2a = \varepsilon R. \tag{3}$$

Din (1) și (3) rezultă acum :

$$a = \frac{g}{1 + 2I/mR^2}, \quad T = \frac{mg}{1 + mR^2/2I}. \tag{4}$$

b) În acest caz $T = mg$ și deci din (1) rezultă $a = 0$. Tamburul se va roti pe loc cu accelerația unghiulară :

$$\varepsilon = TR/I = mgR/I. \tag{5}$$

1.9. Situația inițială și cea finală sînt reprezentate în figura I.11, *R*. Numărul de kilomoli se conservă, deci

$$\frac{p_0 V_1}{RT} = \frac{(p' + \Delta p)V_1}{RT'} + \frac{p' V_2}{RT'}, \tag{1}$$

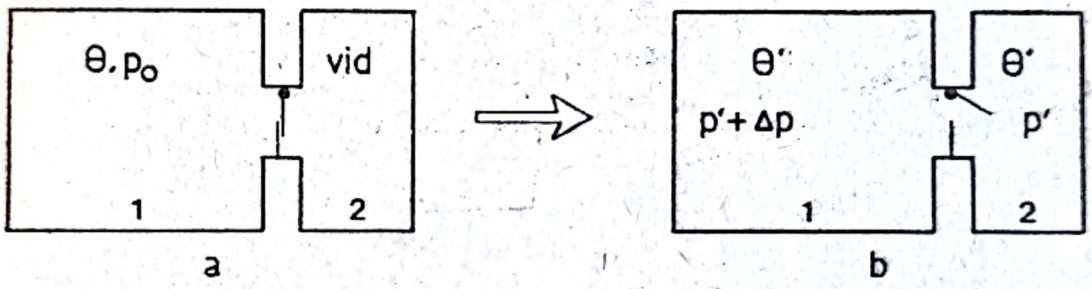


Fig. I.11, R.

de unde

$$p' = \left(p_0 \frac{T'}{T} - \Delta p\right) \frac{V_1}{V_1 + V_2} = \left(760 \frac{435}{290} - 880\right) \text{Torr} \frac{50}{50 + 15} = 200 \text{ Torr}. \tag{2}$$

1.10. Bobina B_1 este parcursă de curentul $I_1 = \frac{E}{R_1}$. În centrul său, ea produce un cîmp magnetic $\vec{H}_1 = \overrightarrow{OA}$ (în planul bobinei B_2) (fig. I.12, *R*). Bobina B_2 este parcursă de curentul $I_2 = \frac{E}{R_2 + R}$. În centrul său ea produce un cîmp $\vec{H}_2 = \overrightarrow{OB}$ (în planul bobinei B_1). Acul de fier moale se va dispune după direcția OC, adică după direcția cîmpului magnetic rezultant : $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$. Fie α unghiul făcut de direcția OC cu planul bobinei B_2. Din triunghiul AOC rezultă :

$$\text{tg } \alpha = \frac{AC}{AO} = \frac{H_2}{H_1}. \tag{1}$$

Dar $$H_1 = \frac{N_1 I_1}{2r_1} \quad (2) \qquad \text{și } H_2 = \frac{N_2 I_2}{2r_2}. \tag{3}$$

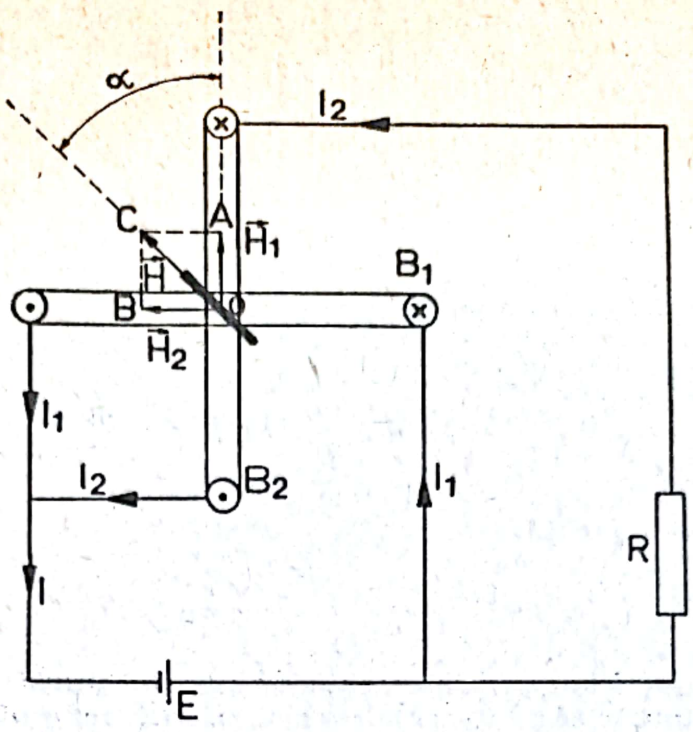


Fig. I.12, R.

Introducînd pe (2) şi (3) în (1) obţinem :

$$\text{tg } \alpha = \frac{H_2}{H_1} = \frac{N_2 I_2}{N_1 I_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_2 I_2}{N_1 I_1} = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{R_1}{R_2 + R}. \qquad (4)$$

Dacă : $R = \infty$, rezultă că $\text{tg } \alpha = 0$, $\alpha = 0$, acul se află în planul bobinei B_2. Pentru $R = 0$, acul va avea deviaţia maximă α_{max} dată de :

$$\text{tg } \alpha_{max} = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

sau, înlocuind prin valorile numerice, obţinem $\text{tg } \alpha_{max} = 10$, ceea ce dă pentru α_{max} valoarea de aproximativ 84°.

Rezistenţa necunoscută R se poate afla din relaţia (4) dacă se cunoaşte deviaţia α a acului. Într-adevăr, relaţia (4) se mai poate scrie :

$$N_1(R_2 + R) \text{ tg } \alpha = N_2 R_1 \text{ de unde :}$$

$$R = \frac{N_2 R_1}{N_1 \text{ tg } \alpha} - R_2 \text{ sau } R = \frac{N_2 R_1}{N_1} \text{ ctg } \alpha - R_2.$$

Exemplu numeric : Dacă $\alpha = 45°$, $\text{ctg } \alpha = 1$, deci

$$R = \frac{100 \cdot 200}{50} - 40 = 360\ \Omega.$$

1.11. Unghiul maxim pe care-l poate face atît raza incidentă cît şi cea emergentă cu normalele la feţele corespunzătoare este de 90°. Deducem imediat expresiile unghiurilor limită :

$$\sin l_1 = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{şi} \quad \sin l_2 = \frac{n_3}{n_2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Condiția de emergență va fi dată de:

$$r \leqslant l_1 \text{ și } r' \leqslant l_2 \text{ sau } r + r' \leqslant l_1 + l_2.$$

Deci: $A \leqslant \text{arc sin } \frac{n_1}{n_2} + \text{arc sin } \frac{n_3}{n_2}$.

Dacă $n_1 = n_3$, atunci: sin l_1 = sin l_2 sau $l_1 = l_2 = l$ deci: $A_{lim} = 2l$.

Dar: sin $l = \frac{n_1}{n_2}$ și făcînd înlocuirile, obținem: sin $l = \frac{2}{3}$, adică $l = \text{arc sin } \frac{2}{3}$.

Așadar: $A_{lim} = 2 \text{ arc sin } \frac{2}{3} = 2 \text{ arc sin } 0{,}66666$.

Din valorile date în enunț reiese că:

$$0{,}66480 < \text{arc sin } 0{,}\ 66666 < 0{,}66697$$

de unde prin extrapolare se obține $A \simeq 81°36'$.

1972

2.1. *a)* În poziția de echilibru stabil energia potențială este *minimă* sau centrul de greutate se află în poziția *cea mai coborîtă*. La o rotire mică a scîndurii energia potențială trebuie să crească sau centrul de greutate să urce.

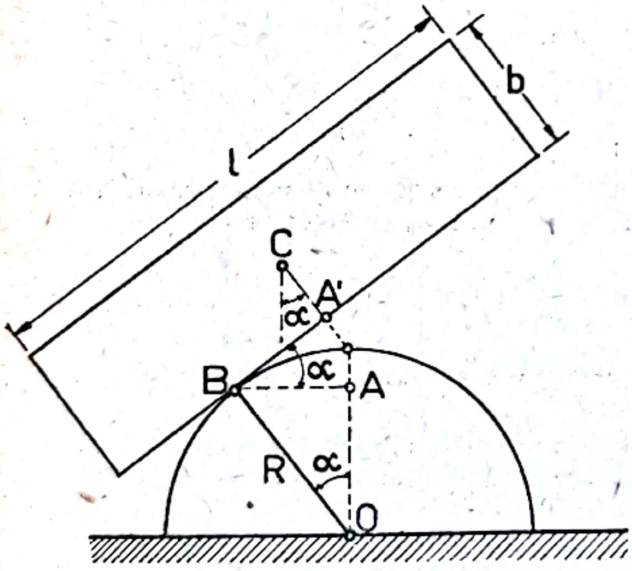


Fig. I.13, R.

Conform figurii I.13, R avem pentru ordonata centrului de greutate:

— în poziția de echilibru:

$$y_0 = R + b/2. \qquad (1)$$

— în poziția rotită, y este proiecția pe axa verticală a liniei frînte $OBA'C$:

$$y = \text{pr. } OBA'C = \text{pr. } OB + \text{pr. } BA' + \text{pr. } A'C, \qquad (2)$$

$$\text{pr. } OB = R \cos \alpha, \quad BA' \approx \approx \text{arc } BA = R\alpha,$$

$$\text{pr. } BA' = R\alpha \sin \alpha,$$

$$\text{pr. } A'C = \frac{b}{2} \cos \alpha. \qquad (3)$$

Prin urmare,

$$y = R \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha + \frac{b}{2} \cos \alpha. \qquad (4)$$

Dacă înmulțim ordonata y cu mg, obținem energia potențială (pînă la o constantă aditivă arbitrară):

$$E_p = mgy = mg\left(R + \frac{b}{2}\right) \cos \alpha + mgR\alpha \sin \alpha. \qquad (5)$$

Scanned with OKEN Scanner

Creşterea ordonatei centrului de greutate va fi deci

$$\Delta y = y - y_0 = R\alpha \sin\alpha - \left(R + \frac{b}{2}\right)(1 - \cos\alpha). \tag{6}$$

Pentru unghiuri α mici ($\alpha \ll 1$ rad sau $\alpha < 6°$), avem aproximaţia $\sin\alpha \approx \alpha$ (în rad), deci

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx 2\cdot\frac{\alpha^2}{4} = \frac{1}{2}\alpha^2 \text{ sau } \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}, \tag{7}$$

de aceea (6) devine $\Delta y \approx \frac{1}{4}(D - b)\alpha^2$, $(D = 2R)$. (8)

La orice rotaţie mică, centrul de greutate va urca, dacă

$$\Delta y > 0, \text{ adică } D > b. \tag{9}$$

Dacă înmulţim (8) cu mg obţinem variaţia energiei potenţiale la rotaţii mici:

$$\Delta E_p \approx \frac{1}{2} mg \frac{D - b}{2}\alpha^2 = \frac{1}{2} k\alpha^2, \; k = mg\frac{D - b}{2}. \tag{10}$$

Dacă este îndeplinită condiţia (9), energia potenţială a scîndurii va creşte la rotaţii în jurul poziţiei de echilibru, care va fi în acest caz echilibru stabil.

Observaţie. Minus derivata energiei potenţiale U în raport cu o coordonată dă componenta forţei în direcţia acelei coordonate:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \; (\vec{F} = -\text{grad } U). \tag{11}$$

Dacă coordonata este unghiulară, obţinem momentul forţei în raport cu axa de rotaţie respectivă.

În poziţia de echilibru forţa rezultantă şi momentul rezultant sînt nule, deci derivatele energiei potenţiale sînt nule. De exemplu în cazul nostru:

$$E_p'(\alpha) = \frac{dE_p}{d\alpha} = -mg\left(R + \frac{b}{2}\right)\sin\alpha + mgR(\sin\alpha + \alpha\cos\alpha) = -\frac{b}{2}mg\sin\alpha + mgR\alpha\cos\alpha \tag{12}$$

se anulează în poziţia de echilibru (pentru $\alpha = 0$).

Caracterul echilibrului într-un punct este dat de semnul derivatei a doua a energiei potenţiale în acel punct. Dacă derivata a doua a energiei potenţiale este pozitivă, atunci energia potenţială are acolo un minim, deci echilibrul va fi stabil. Dacă derivata a doua este negativă, energia potenţială va avea un maxim, deci echilibrul va fi instabil. Dacă derivata a doua este nulă, trebuie studiat semnul derivatei a treia sau a primei derivate nenule care urmează. Dacă toate derivatele sînt nule în punctul considerat, înseamnă că energia potenţială este de fapt o constantă şi echilibrul este indiferent.

În cazul problemei noastre:

$$E_p''(\alpha) = \frac{d^2E_p}{d\alpha^2} = mg\left(R - \frac{b}{2}\right)\cos\alpha - mgR\alpha\sin\alpha \tag{13}$$

devine în poziţia de echilibru ($\alpha = 0$):

$$E_p''(0) = mg\left(R - \frac{b}{2}\right). \tag{14}$$

De aici rezultă imediat caracterul echilibrului.

Scanned with OKEN Scanner

b) Energia cinetică de rotaţie pentru unghiuri α mici:

$$E_c = \frac{1}{2} I'\omega^2, \quad \omega = \frac{d\alpha}{dt} = \text{viteza unghiulară}, \tag{15}$$

I' = momentul de inerţie faţă de linia de contact cu cilindrul.
Energia potenţială (10) este de tip $kx^2/2$, unde

$$k = \frac{1}{2} mg\ (D - b) \text{ şi } x = \alpha. \tag{16}$$

Energia cinetică (15) este de tip $mv^2/2 = m\dot{x}^2/2$, unde rolul masei m îl joacă momentul de inerţie I', deoarece rolul vitezei $v = \dot{x}$ îl joacă viteza unghiulară $\omega = \dot{\alpha}$.

Atunci, ca la oscilatorul armonic liniar:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2I'}{mg(D-b)}}. \tag{17}$$

Conform teoremei lui Steiner:

$$I' = I + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{m}{12}(l^2 + b^2) + m\frac{b^2}{4} = \frac{m}{12}(l^2 + 4b^2), \tag{18}$$

prin urmare,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l^2 + 4b^2}{6g(D - b)}}. \tag{19}$$

Se vede din nou condiţia necesară $D - b > 0$.

Observaţie. Se poate judeca şi astfel:

Momentul forţei de greutate $\vec{mg}$ faţă de axa de rotaţie (linia de contact cu cilindrul) este

$$M = -mg\left(R\alpha \cos\alpha - \frac{b}{2}\sin\alpha\right) \tag{20}$$

care pentru unghiuri mici devine:

$$M \approx -mg\left(R - \frac{b}{2}\right)\alpha. \tag{21}$$

Ecuaţia diferenţială a mişcării de rotaţie (pendulul fizic) este

$$M = I'\varepsilon = I'\frac{d^2\alpha}{dt^2} = I'\ddot{\alpha}, \tag{22}$$

unde I' este momentul de inerţie al scindurii faţă de axa de rotaţie. Prin urmare,

$$-mg\left(R - \frac{b}{2}\right)\alpha = I'\ddot{\alpha}, \quad \ddot{\alpha} + \frac{mg\,(D - b)}{2I'}\alpha = 0, \tag{23}$$

de unde

$$\omega^2 = \frac{mg\,(D - b)}{2I'} \quad \text{sau} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{2I'}{mg(D - b)}}. \tag{24}$$

Scanned with OKEN Scanner

2.2. Lucrul mecanic efectuat de un gaz ideal într-o transformare izotermă :

$$L = \int p\,dV = \int \frac{\nu RT}{V}\,dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu\, RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \qquad (1)$$

Într-un ciclu Carnot raportul temperaturilor surselor este egal cu raportul căldurilor schimbate cu acele surse, anume :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{Q_2'}{Q_1'}, \quad (Q_1' = -Q_1,\ Q_2' = -Q_2), \qquad (2)$$

unde Q_2 este căldura absorbită de la sursa caldă T_2 și Q_1 este căldura cedată sursei reci T_1, în cazul unui ciclu Carnot direct (mașină termică, care produce lucru mecanic pe seama căldurii $Q_2 - Q_1$); respectiv Q_2' — căldura cedată sursei calde T_2 și Q_1' — căldura absorbită de la sursa rece T_1 în cazul ciclului Carnot inversat (mașină frigorifică — cînd ne interesează răcirea sursei reci — sau pompă de căldură — cînd ne interesează încălzirea sursei calde —, care consumă un lucru mecanic L' și transferă căldură de la sursa rece la cea caldă) :

$$L = Q_2 - Q_1, \text{ respectiv } Q_2' = Q_1' + L' \text{ (fig. I.14, } R). \qquad (3)$$

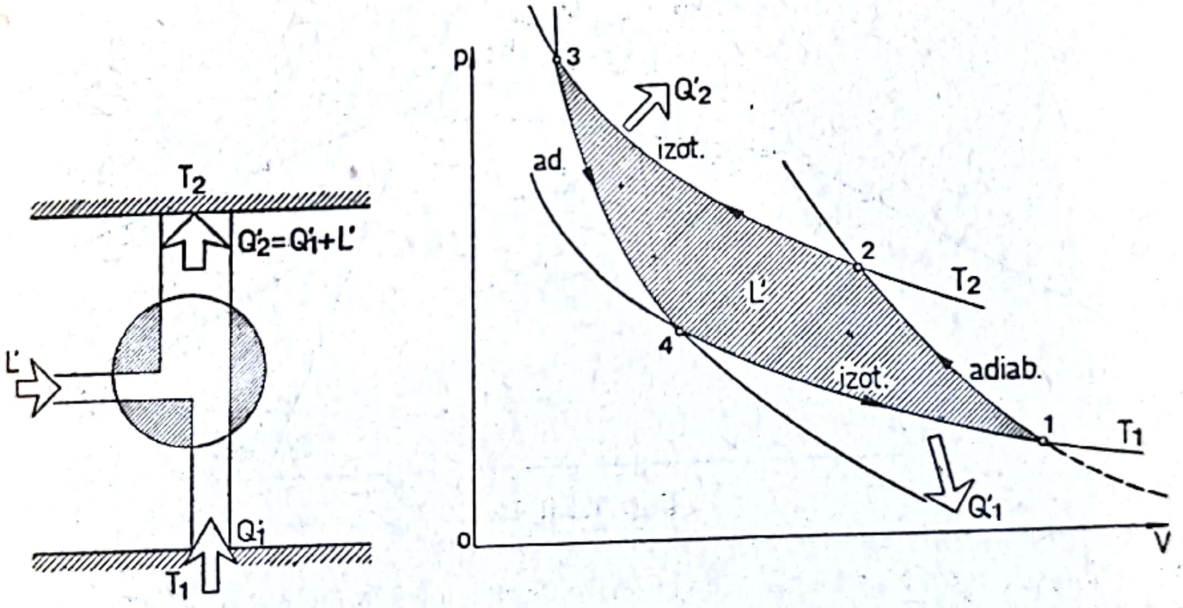


Fig. I.14, R.

În cazul problemei trebuie evacuată căldura $Q_1' = m\lambda$ la $\theta_1 = 0°C$ și transferată mediului ambiant la $\theta_2 = 20°C$. Din (2) avem

$$\varepsilon = \frac{L'}{Q_1'} = \frac{Q_2' - Q_1'}{Q_1'} = \frac{T_2 - T_1}{T_1} = \frac{20}{273} = 7{,}3\,\%. \qquad (4)$$

Mai departe, tot din (2)

$$Q_2' = Q_1' \frac{T_2}{T_1},\ L' = Q_2' - Q_1' = Q_1' \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = Q_1' \frac{T_2 - T_1}{T_1} \qquad (5)$$

sau direct

$$L' = \varepsilon Q_1';$$

Scanned with OKEN Scanner

$$L' = \frac{T_2 - T_1}{T_1} m\lambda = \frac{20}{273}\ 1{,}00\ \text{kg} \cdot 335\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 24{,}6\ \text{kJ}. \qquad (6)$$

$$Q_2' = Q_1' + L' = \frac{T_2}{T_1} Q_1' = \frac{293}{273}\ 335\ \text{kJ} = 360\ \text{kJ}. \qquad (7)$$

2.3. Din figura I.15, *R* rezultă că unghiul făcut de razele emergente extreme, $I_r'R$ și $I_r'V$, este β. Din triunghiul *MLK* se obține :

$$\beta + \pi - \delta_v + \delta_r = \pi \qquad (1)$$

sau

$$\beta = \delta_v - \delta_r \qquad (2)$$

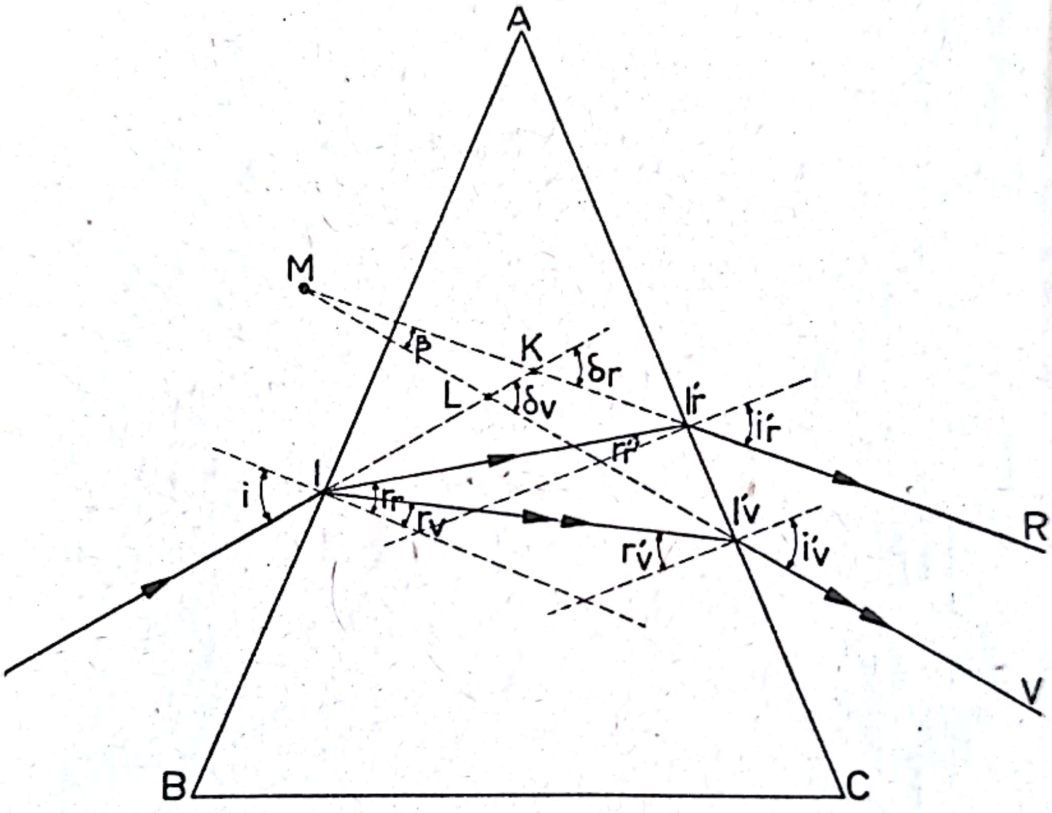


Fig. I.15, R.

unde δ_r și δ_v reprezintă deviațiile suferite de razele extreme ale spectrului emergent. Expresiile lui δ_r și δ_v sînt :

$$\delta_r = i + i_r' - A \ (3) \text{ și} \qquad \delta_v = i + i_v' - A. \qquad (4)$$

Urmează a fi determinate unghiurile i_r' și i_v'.
Aplicînd legea refracției în punctul *I*, avem :

$$\sin r_v = \frac{\sin i}{n_v} = \frac{1}{2 \cdot 1{,}67} = \frac{1}{3{,}34} = 0{,}29940 \text{ și}$$

$$\sin r_r = \frac{\sin i}{n_r} = \frac{1}{2 \cdot 1{,}62} = \frac{1}{3{,}24} = 0{,}30864$$

de unde $r_v \simeq 17°25'$, iar $r_r \simeq 18°2'$.

Scanned with OKEN Scanner

Din relaţiile: $A = r_r + r'_r$ şi $A = r_v + r'_v$ explicităm pe r'_r şi r'_v: $r'_r = A - r_r = 26°58'$, iar $r'_v = A - r_v = 27°35'$.

Aplicînd legea refracţiei în punctele I'_r şi I'_v la faţa de ieşire, obţinem:

$$\sin i'_r = n_r \cdot \sin r'_r = 1{,}62 \cdot 0{,}45348 = 0{,}73462 \text{ şi}$$

$$\sin i'_v = n_v \cdot \sin r'_v = 1{,}67 \cdot 0{,}46355 = 0{,}77379.$$

de unde: $i'_r = 47°17'$, iar $i'_v = 50°42'$.

Putem calcula acum pe δ_r şi δ_v:

$$\delta_r = i + i'_r - A = 30° + 47°17' - 45° = 32°17';$$

$$\delta_v = i + i'_v - A = 30° + 50°42' - 45° = 35°42'.$$

În fine, unghiul făcut de razele emergente extreme va fi:

$$\beta = \delta_v - \delta_r = 3°25'.$$

2.4. Notăm cu $\vec{a}_{sc}$ acceleraţia scării şi cu $\vec{a}_{om}$ acceleraţia omului faţă de Pămînt. Considerînd sistemul total (scară-om + contragreutate) şi ţinînd seama că scripetele inversează sensul forţei şi al acceleraţiei (fig. I.16, *R*), vom avea forţă rezultantă nulă, deci legea a doua dă

$$0 = (m_{sc} + m_{om})a_{sc} + m_{sc}a_{sc} - m_{om}a_{om}, \qquad (1)$$

de unde

$$\frac{a_{om}}{a_{sc}} = \frac{m_{om} + 2m_{sc}}{m_{om}} = \frac{n+2}{n} \qquad (2)$$

Acceleraţia relativă a omului faţă de scară este

$$a_{om} - (-a_{sc}) = a_{om} + a_{sc}, \qquad (3)$$

astfel încît

$$\frac{s}{s'} = \frac{a_{om}}{a_{om} + a_{sc}} = \frac{n+2}{2n+2}, \quad s = s' \frac{n/2+1}{n+1} = 2{,}1 \text{ m} \cdot \frac{4}{7} = 1{,}2 \text{ m}. \qquad (4)$$

2.5. Masa de hidrogen suferă o transformare izotermă. Cu notaţiile din figura I.17, *R* avem

$$p_0 L = [H + \rho g(h - l)]l. \qquad (1)$$

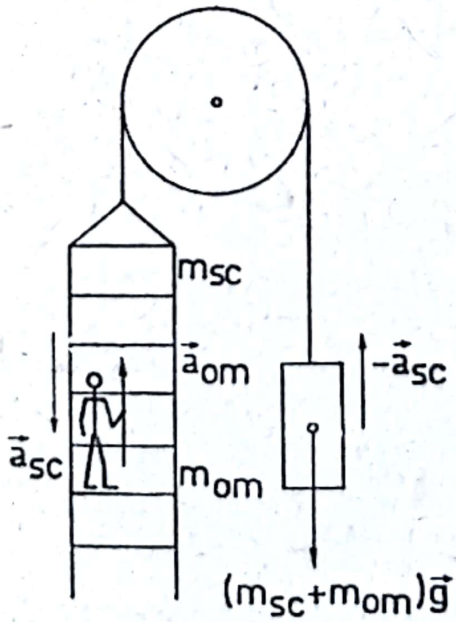


Fig. I.16, R.

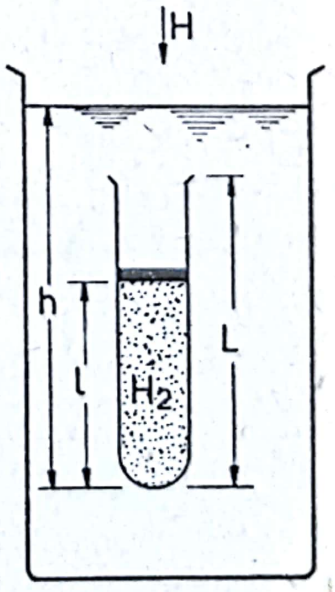


Fig. I.17, R.

Dacă măsurăm lungimile în mm și presiunile în Torr, factorul ρg dispare (neglijînd corecțiile de temperatură și de accelerație gravitațională) și ecuația se scrie mai simplu :

$$l^2 - l(H + h) + p_0 L = 0. \tag{2}$$

Există soluții reale dacă discriminantul este pozitiv

$$(H + h)^2 - 4p_0 L \geqslant 0, \quad h \geqslant \sqrt{4p_0 L} - H \tag{3}$$

sau în unități SI :

$$h \geqslant 2\sqrt{Lp_0/\rho g} - H/\rho g. \tag{4}$$

Ecuația (2) are două soluții pozitive :

$$l = \frac{1}{2}\,(H + h \pm \sqrt{(H+h)^2 - 4p_0 L}). \tag{5}$$

Pentru a vedea care soluție este stabilă să reprezentăm grafic, pe de o parte, presiunea exterioară asupra hidrogenului $p = H + h - l$ în funcție de l și pe de altă parte, presiunea „interioară" a hidrogenului $p = p_0 L/l$ în funcție de l (fig. I.18, *R*).

La echilibru cele două presiuni se egalează și obținem drept soluție cele două puncte de intersecție din figură.

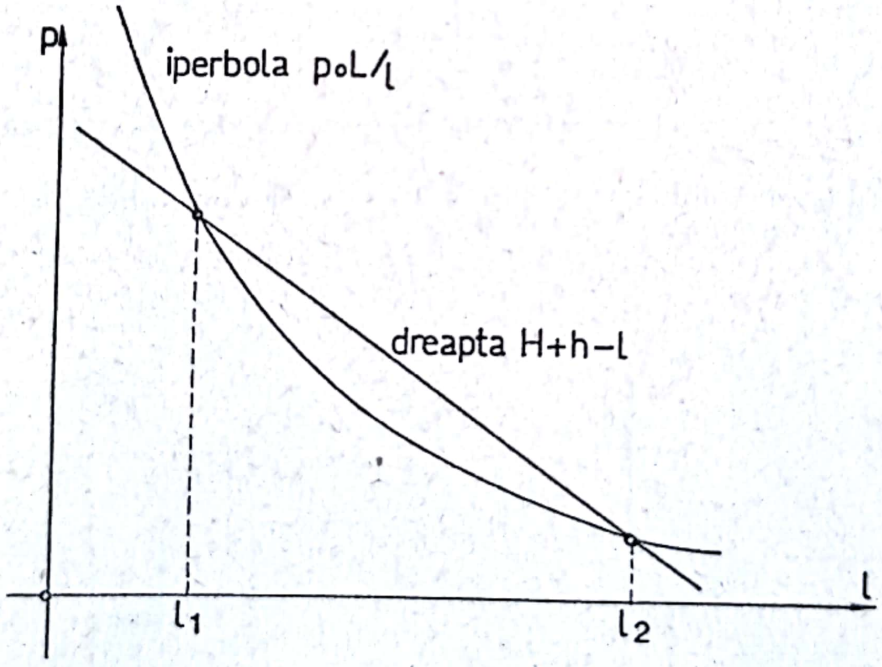


Fig. I.18, R.

Soluția l_1 este cea stabilă, deoarece la o creștere a lui l peste l_1 presiunea exterioară devine mai mare decît cea interioară și readuce pistonul la loc. Invers, dacă l scade sub l_1, presiunea interioară devine mai mare decît cea exterioară și împinge pistonul înapoi.

Soluția l_2 este instabilă, deoarece la o creștere a lui l peste l_2 presiunea interioară devine mai mare decît cea exterioară și împinge pistonul afară.

Scanned with OKEN Scanner

Invers, dacă l scade sub l_2 presiunea exterioară devine mai mare decît cea interioară și împinge pistonul și mai adînc pînă la cealaltă valoare stabilă l_1.

Prin urmare, soluția stabilă este

$$l = \frac{1}{2}\left(H + h - \sqrt{(H+h)^2 - 4p_0 L}\right) \tag{6}$$

sau în unități SI:

$$l = \frac{1}{2}\left(H/\rho g + h - \sqrt{(H/\rho g + h)^2 - 4Lp_0/\rho g}\right). \tag{7}$$

2.6. Traiectoria electronului care străbate succesiv cele două cîmpuri magnetice (B și $2B$) va fi o spirală (fig. I.19, *R*). Se constată o periodicitate în parcurgerea spiralei după descrierea unui semicerc mare, de diametru $2a$, și a unui semicerc mic, de diametru a.

Pentru a afla viteza relativă pe direcția Oy va trebui să evaluăm spațiul parcurs pe Oy pe durata descrierii celor două semicercuri, cum și timpul corespunzător.

Pe direcția Oy spațiul va fi: $s_y = 2a - a = a$, iar timpul: $t = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2}$

unde T_1 și T_2 sînt perioadele de revoluție de-a lungul traiectoriilor circulare.

Cum: $T = \frac{2\pi m}{eB}$, urmează că: $t = \frac{3}{2}\frac{\pi m}{eB}$, deci:

$$v_y = \frac{s_y}{t} = \frac{2}{3}\cdot\frac{aeB}{\pi m}.$$

Se știe că: $v_0 = \frac{eBa}{m}$, prin urmare: $v_y = \frac{2}{3\pi}v_0$.

2.7. Fasciculul de raze incidente care satisface condiția de emergență este cel cuprins între razele SI și S_1I (fig. I.20, *R*). Razei SI îi corespunde raza refractată II', ce face cu normala în I un unghi de refracție egal cu unghiul limită. Emergenta are direcția $I'O$. Razei S_1I îi corespunde raza refractată II'', ce face cu normala în I'' un unghi $r_1' = l$. Emergenta are direcția $I''R''$.

Zona luminoasă este cuprinsă între razele $I'O$ și $I''R''$ (haşuraj orizontal 1 în figura I.20, *R*) iar zona întunecată este cuprinsă între raza $I'O$ și prismă (haşuraj vertical 2 în figura I.20, *R*).

Linia de demarcație între zona luminoasă și cea întunecată este $I'O$. Ea face cu axa optică principală a lentilei L un unghi $\alpha = 30°$. Urmărind figura I.20, *R*, se poate deduce imediat valoarea unghiului i'. Într-adevăr, din triunghiul $PI'O$ avem: $i' = \alpha - A$. Cum $\alpha = A = 30°$, rezultă $i' = 0$, deci $r' = 0$. Prin urmare II' are direcția normalei pe fața AB a prismei. În acest caz $l = A$, ca avînd laturile două cîte două perpendiculare. Știind că:

$$\sin l = \frac{1}{n}, \text{ deci } n = \frac{1}{\sin l} \text{ și cum: } l = A, \text{ urmează că:}$$

$$n = \frac{1}{\sin A} \text{ sau, făcînd înlocuirile, } n = 2.$$

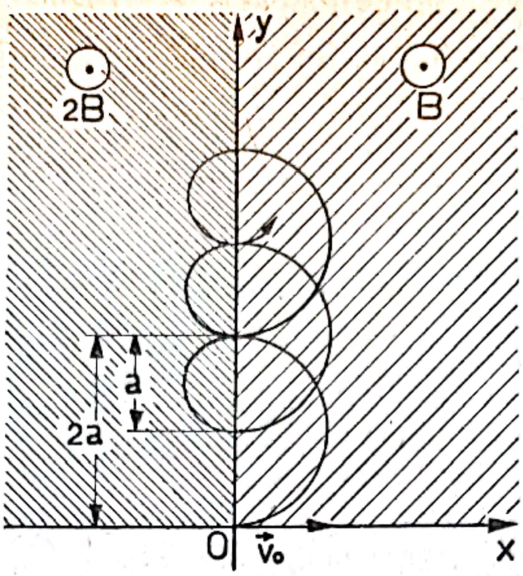


Fig. I.19, R.

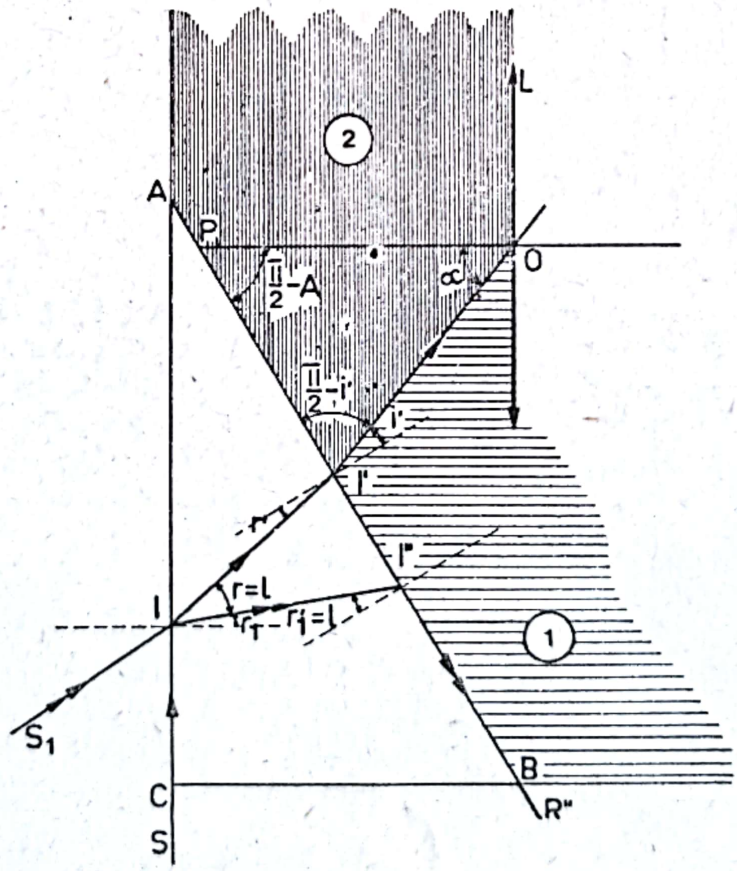


Fig. I.20, R.

Scanned with OKEN Scanner

3.1. Să notăm cu Q debitul masic al apei care pătrunde în motor, cu v_1 viteza șalupei, deci v_1 este și viteza cu care apa intră în motor, cu v_2 — viteza cu care iese apa din motor, față de motor.

Forța care acționează asupra șalupei este egală în modul și de sens opus cu forța care acționează asupra masei de apă. Dar aceasta din urmă este egală cu variația impulsului în unitatea de timp, deci

$$F = Q(v_2 - v_1), \ (v_2 > v_1). \tag{1}$$

Puterea utilă a motorului este evident

$$P_u = Fv_1 = Q(v_2 - v_1)v_1, \tag{2}$$

iar cea neutilă este egală cu energia cinetică transmisă apei în unitatea de timp:

$$\frac{1}{2}Q(v_2 - v_1)^2,$$

deci

$$\eta = \frac{P_u}{P_t} = \frac{Q(v_2 - v_1)v_1}{Q(v_2 - v_1)v_1 + \frac{1}{2}Q(v_2 - v_1)^2} = \frac{2v_1}{v_2 + v_1}. \tag{3}$$

Puterea totală se poate găsi direct, judecînd *față de motor*: este variația energiei cinetice a apei în unitatea de timp:

$$P_t = \frac{1}{2}Q(v_2^2 - v_1^2). \tag{4}$$

Din ecuația de continuitate avem: $S_1v_1 = S_2v_2$, (5)

deci randamentul: $\eta = \frac{2}{1 + v_2/v_1} = \frac{2}{1 + S_1/S_2} = \frac{2}{1 + n} < 1, \ (n > 1).$ (6)

3.2. Gazul din balon suferă o transformare izotermă:

$$pV = \text{const}, \text{ (legea Boyle-Mariotte).} \tag{1}$$

Învelișul fiind elastic, presiunea p a gazului din interior este egală cu presiunea atmosferică H.

Forța de ascensiune este forța arhimedică, egală cu greutatea volumului de aer dezlocuit:

$$F_A = V\rho_{aer}g = V\frac{H\mu}{RT}g = \text{const}, \ (\mu = \text{masa molară a aerului}). \tag{2}$$

$F_A = \text{const.}$, deoarece $p = H$ și $pV = \text{const.}$ (și $T = \text{const.}$). (3)

Am folosit ecuația de stare a gazelor $pV = \frac{m}{\mu}RT$, (4)

de unde rezultă formula densității gazelor: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$. (5)

3.3. Presupunînd că nu există disipare de energie de la generator la ansamblul sferelor, vom avea: $E = V_1 - V_2$, unde: E este tensiunea electromotoare a generatorului, iar $V_1 - V_2$, diferența de potențial dintre cele două sfere.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece sferele se încarcă cu sarcini egale dar de semn contrar, putem scrie :

$$|Q_1| = |Q_2| \text{ unde : } Q_1 = +Q \text{ și } Q_2 = -Q. \quad (1)$$

Cum : $Q = 4\pi\varepsilon r V$ din relația (1) vom deduce : $\frac{r_1}{r_2} = \frac{V_2}{V_1}$. (2)

Explicitînd potențialele V_1 și V_2 în funcție de $V_1 - V_2$, r_1, r_2, obținem :

$$V_2 = \frac{V_1 - V_2}{r_2 - r_1} r_1 \text{ și } V_1 = \frac{V_1 - V_2}{r_2 - r_1} r_2$$

sau, înlocuind cu date numerice : $V_2 = 3\,000$ V, iar $V_1 = 6\,000$ V.

Vom calcula acum sarcina electrică Q :

$$Q = 4\pi\varepsilon r_1 V_1 = \frac{2}{3} 10^{-8} \text{ C.}$$

Cunoscînd sarcinile celor două sfere putem calcula forța de interacțiune :

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3} 10^{-8}\right)^2}{1} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ N.}$$

3.4. *a)* În cazul utilizării luminii albe, franjele de interferență se vor prezenta astfel : pentru $k = 0$, cum $x = k\frac{\lambda D}{a}$ urmează că $x = 0$, deci franja centrală coincide pentru toate radiațiile din vizibil. Dacă observarea se face pe un ecran, franja centrală va fi luminoasă, albă. Pentru $k = 1$, $x = \frac{\lambda D}{a}$, și deoarece $x = f(\lambda)$ rezultă că franja de ordinul 1 va fi colorată cu violetul spre franja centrală și cu roșul spre exterior. Pentru $k = 2,3\ldots$ apar tot franje colorate, dar distanța dintre violet și roșu crește și, prin urmare, dunga luminoasă colorată devine din ce în ce mai largă. Se ajunge astfel într-o poziție în care franja violetă de ordinul $k+1$ se suprapune peste franja roșie de ordinul k. În cazul analizat, acest lucru are loc pentru $k = 1$ și $k = 2$ (fig. I.21, *R*).

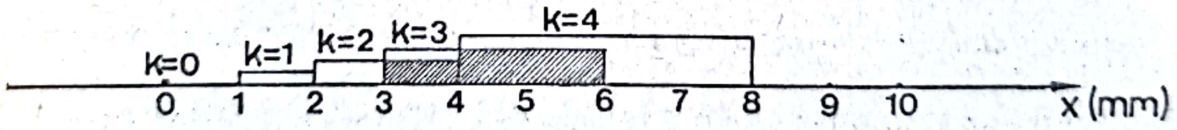


Fig. I.21, R.

Într-adevăr, un calcul elementar ne arată că :

$$x_{1roșu} = \frac{\lambda_r D}{a} = 2 \text{ mm și } x_{2violet} = 2\frac{\lambda_v D}{a} = 2 \text{ mm.}$$

De la acest ordin înainte ($k = 2$) vom avea zone de suprapunere a franjelor ($k + 1$ peste k) din ce în ce mai întinse. Ecranul de observație apare luminat într-un alb cenușiu, numit alb de ordin superior.

b) Fanta spectroscopului fiind dispusă la o asemenea distanță de fanta centrală încît în zona respectivă avem alb de ordin superior, se va putea distinge un spectru colorat brăzdat de linii negre (obscure), numit *spectru canelat.*

Fiecare canelură corespunde unei radiații de o anumită lungime de undă. De exemplu, în cazul dat, pentru $x = 15$ mm vom putea calcula foarte ușor numărul canelurilor și lungimile de undă corespunzătoare.

Vom pleca de la relația:

$$\delta = \frac{ax}{D} = (2k' + 1)\ \frac{\lambda}{2}, \text{ de unde:}$$

$\lambda = \dfrac{2ax}{D(2k' + 1)}$ sau, făcînd înlocuirile, obținem: $\lambda = \dfrac{1{,}2 \cdot 10^{-7}}{2k' + 1}$ m.

Cum $0{,}4\ \mu\text{m} \leqslant \lambda \leqslant 0{,}8\ \mu\text{m}$, k' nu va putea lua decît valorile care satisfac inegalitatea:

$$0{,}4\ \mu\text{m} \leqslant \frac{1{,}2 \cdot (1{,}5)^{-7}}{2k' + 1} \leqslant 0{,}8\ \mu\text{m}, \text{ relație din care rezultă } 7 \leqslant k' \leqslant 14.$$

Valorile corespunzătoare ale lungimilor de undă pentru cele 8 caneluri vor fi:

$k' = 7,$ $\lambda = 0{,}8\ \mu\text{m}$
$k' = 8,$ $\lambda = 0{,}706\ \mu\text{m}$
$k' = 9,$ $\lambda = 0{,}636\ \mu\text{m}$
$k' = 10,$ $\lambda = 0{,}562\ \mu\text{m}$
$k' = 11,$ $\lambda = 0{,}522\ \mu\text{m}$
$k' = 12,$ $\lambda = 0{,}480\ \mu\text{m}$
$k' = 13,$ $\lambda = 0{,}444\ \mu\text{m}$
$k' = 14,$ $\lambda = 0{,}414\ \mu\text{m}.$

3.5. *a*) În momentul inițial $t = 0$ avem o rotație pură în jurul punctului de contact al bilei inferioare, deci în acest moment viteza centrului de masă va fi orizontală și egală în modul cu $v/2$. Desprinzîndu-se de masă, haltera va fi supusă numai la forța de greutate, deci centrul de masă se va mișca pe o parabolă ca la o aruncare cu viteza inițială orizontală $v/2$. (Reamintim că centrul de masă se mișcă ca un punct material sub acțiunea rezultantei forțelor aplicate.) În același timp haltera se va roti liber în jurul CM cu viteza unghiulară constantă:

$$\omega = \frac{v/2}{l/2} = \frac{v}{l}. \tag{1}$$

Pentru desprindere trebuie ca accelerația centripetă a bilei inferioare

$$a_c = \omega^2\ \frac{l}{2} = \frac{v^2}{2l} \tag{2}$$

să fie mai mare decît accelerația gravitațională g:

$$a_c > g,\ v > \sqrt{2lg}. \tag{3}$$

b) În acest caz centrul de greutate coboară cu $l/2$:

$$\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\ gt^2 \tag{4}$$

și în același timp haltera se rotește cu 90°:

$$\frac{\pi}{2} = \omega t, \tag{5}$$

Scanned with OKEN Scanner

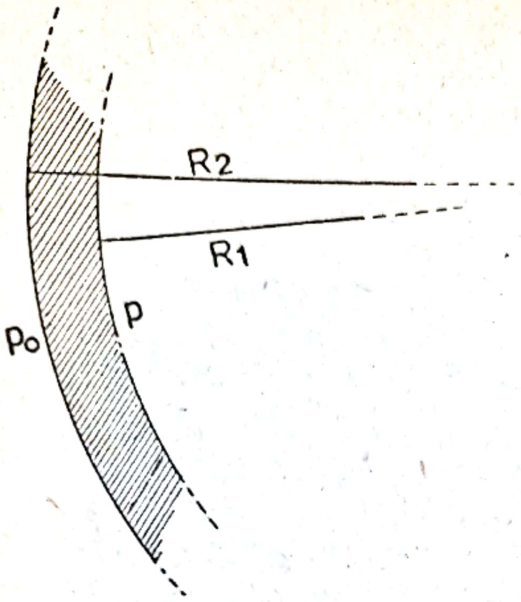


Fig. I.22, R.

de unde $v = \frac{\pi}{2}\sqrt{lg} > \sqrt{2lg}$. (6)

Această viteză este mai mare decît viteza (3).

3.6. *a*) Conform figurii I,22, R trecerea de la exteriorul balonului spre interior se face traversînd două pelicule superficiale : aer-lichid şi lichid-aer.

Conform formulei lui Laplace diferenţa de presiune de la partea concavă sprea cea convexă este

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right); \quad (1)$$

unde R_1, R_2 sînt razele de curbură principale ale peliculei.

În cazul peliculei sferice $R_1 = R_2 = R$ = raza sferei :

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \quad (2)$$

Trecînd de la exterior spre interior, la prima traversare a peliculei presiunea devine :

$$p_0 + 2\sigma/R_2$$

şi la a doua traversare

$$p_0 + 2\sigma/R_2 + 2\sigma/R_1.$$

Cum grosimea balonului este foarte mică faţă de diametrul său : $R_1 \approx R_2 \approx R$ şi găsim :

$$p = p_0 + \frac{4\sigma}{R}. \quad (3)$$

b) În imediata vecinătate a suprafeţei unui conductor cîmpul electric este perpendicular pe suprafaţă şi egal cu σ_{el}/ε, unde σ_{el} este densitatea sarcinii electrice, iar ε — permitivitatea electrică a mediului.

Atunci asupra unui element de arie dS cu sarcina $dQ = \sigma_{el}dS$ va acţiona o forţă electrică spre exterior :

$$dF = EdQ = \frac{\sigma_{el}}{\varepsilon}\sigma_{el}dS = \frac{1}{\varepsilon}\sigma_{el}^2 dS. \quad (4)$$

deci o presiune asupra suprafeţei :

$$p_{el} = \frac{dF}{dS} = \frac{1}{\varepsilon}\sigma_{el}^2. \quad (5)$$

Pe de altă parte,

$$\sigma_{el} = \frac{Q}{S} = \frac{CV}{4\pi R^2} = \frac{4\pi\varepsilon RV}{4\pi R^2} = \frac{\varepsilon V}{R}, \quad (6)$$

deci : $$p_{el} = \frac{\varepsilon V^2}{R^2}. \quad (7)$$

Această presiune se scade din (3).

Scanned with OKEN Scanner

Să evaluăm presiunile (3) și (7):

$$\frac{4\sigma}{R} \approx \frac{4\cdot 50\cdot 10^{-3}\ \text{N/m}}{0{,}10\ \text{m}} = 2\ \ \text{N/m}^2, \quad \frac{\varepsilon V^2}{R^2} \approx \frac{8{,}8\cdot 10^{-12}(\text{F/m})\cdot 10^6 V^2}{(0{,}10)^2\ \text{m}^2} =$$

$$= 8{,}8\cdot 10^{-4}\ \ \text{N/m}, \tag{8}$$

deci presiunea suplimentară electrică este mult mai mică decît cea datorată tensiunii superficiale (forțelor moleculare).

Dacă notăm cu ΔR variația razei balonului, atunci după aplicarea tensiunii, presiunea din interior va fi

$$p' = p_0 + \frac{4\sigma}{R+\Delta R} - \frac{\varepsilon V^2}{(R+\Delta R)^2}. \tag{9}$$

Pe de altă parte aerul din interior suferă o transformare izotermă (la temperatura mediului):

$$\left(p_0 + \frac{4\sigma}{R}\right)\frac{4\pi}{3}R^3 = p'\frac{4\pi}{3}(R+\Delta R)^3, \tag{10}$$

sau

$$p_0R^3 + 4\sigma R^2 = p_0(R+\Delta R)^3 + 4\sigma(R+\Delta R)^2 - \varepsilon V^2(R+\Delta R). \tag{11}$$

Deoarece p_{el} este foarte mic, și variația razei va fi foarte mică față de R, deci putem neglija puterile superioare ale lui ΔR, păstrînd numai termenii liniari în ΔR în membrul drept (11). Mai detaliat, aceasta înseamnă scoaterea în factor a lui R^3 și neglijarea puterilor superioare ale raportului $\Delta R/R$ care este mult mai mic decît unu.

$$p_0R^3 + 4\sigma R^2 \cong p_0R^3 + 3p_0R^2\Delta R + 4\sigma R^2 + 8\sigma R\Delta R - \varepsilon V^2R - \varepsilon V^2\Delta R \tag{12}$$

de unde

$$\Delta R = \frac{\varepsilon V^2 R}{3p_0R^2 + 8\sigma R - \varepsilon V^2} = R\,\frac{\frac{\varepsilon V^2}{R^2}}{3p_0 + \frac{8\sigma}{R} - \frac{\varepsilon V^2}{R^2}} \approx R\,\frac{p_{el}}{3p_0}, \tag{13}$$

$$\frac{\Delta R}{R} \cong \frac{p_{el}}{3p_0} \approx 10^{-9} = 10^{-7}\%, \tag{14}$$

deci o variație într-adevăr foarte mică.

3.7. *a*) Rezistența echivalentă a rețelei din figura I.23, $R(a)$, între punctele B și F, se poate afla reducînd schema inițială la scheme echivalente din ce în ce mai simple. Astfel, din schema *a* se poate trece la schema echivalentă *b* (fig. I.23, *R*).

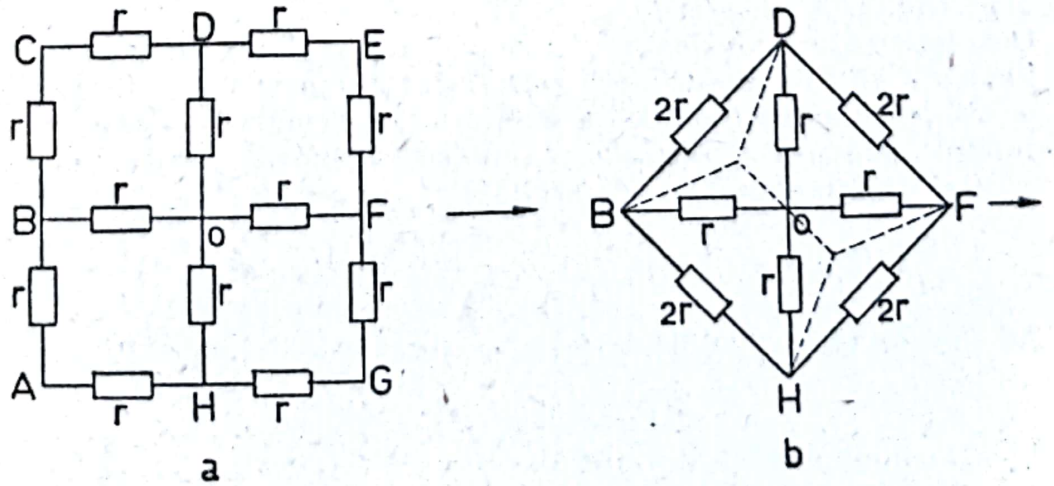


Fig. I.23, R.

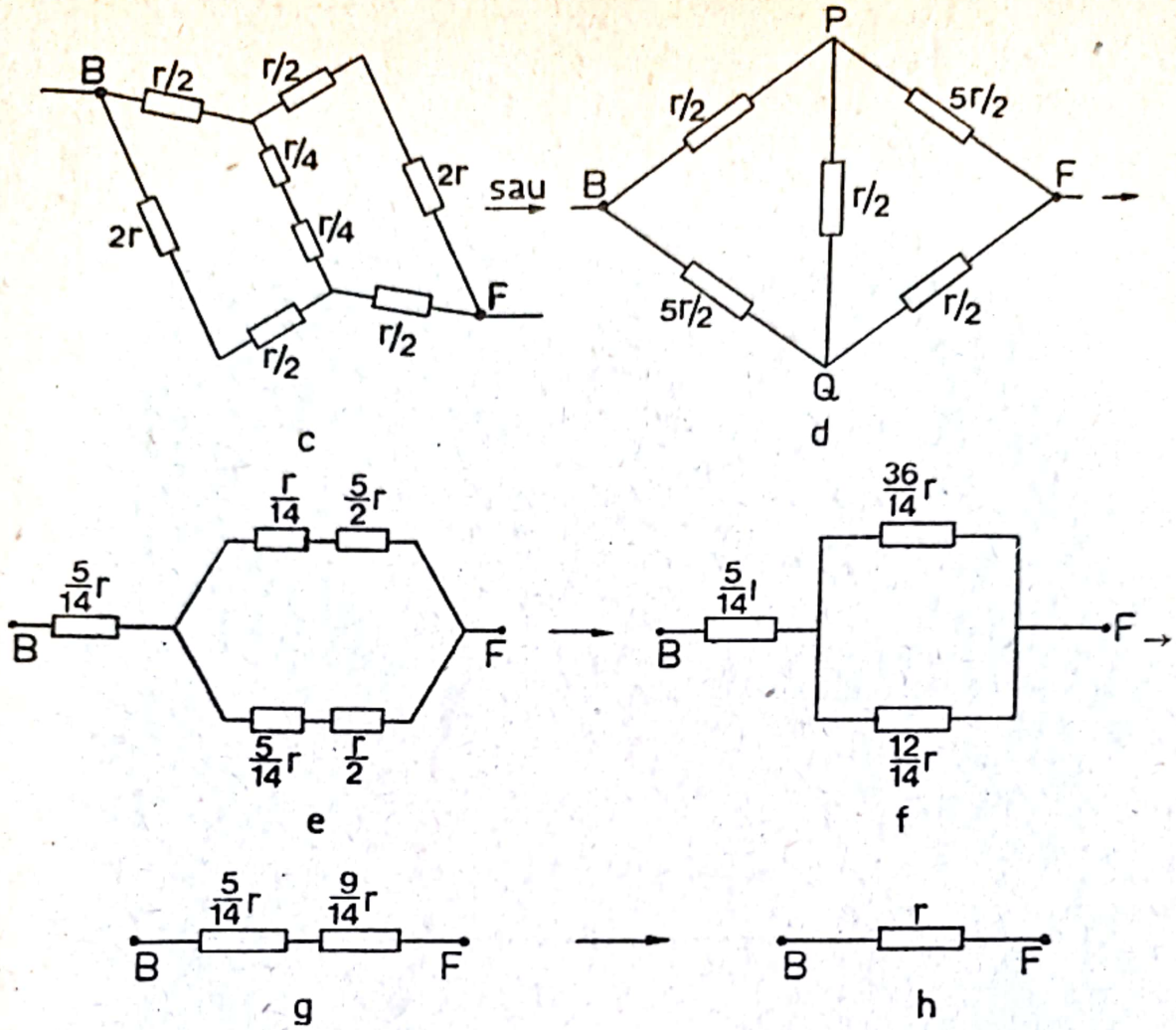


Fig. I.23, R.

Din schema *b* se poate trece în schema echivalentă *c*, prin două transfigurări stea-triunghi.

Utilizînd din nou transfigurarea triunghi-stea se ajunge la schema din figura *e*, și, mai departe, la cea din figura *f*.

În figura I,23, *R*, *f* s-a ajuns la o legare mixtă a trei rezistoare care se poate reduce la o legare în serie, de unde se deduce imediat rezistența echivalentă R_{BF} (fig. I.23, *R*, *g* și *h*).

Deci rezistența echivalentă între punctele *B* și *F* este : $R_{BF} = r$.

Pentru a afla rezistențele echivalente între punctele *A* și *C*, *A* și *E*, *B* și *O*, se utilizează aceeași metodă a reducerii la scheme echivalente din ce în ce mai simple, pe parcurs utilizîndu-se și procedeul transfigurării stea-triunghi. Vom obține, astfel, următoarele rezultate :

$$b)\ R_{AC} = \frac{5}{4} r\ ;\ c)\ R_{AE} = \frac{3}{2} r \text{ și } d)\ R_{BO} \simeq 0{,}5\ r.$$

3.8. Se știe că unghiul de deviație la prismă este dat de relația :

$$\Delta = i + i' - A. \qquad (1)$$

Cum la minimum de deviație $i = i'$ și $r = r'$ relația (1) devine :

$$\Delta = 2i - A. \qquad (1')$$

Scanned with OKEN Scanner

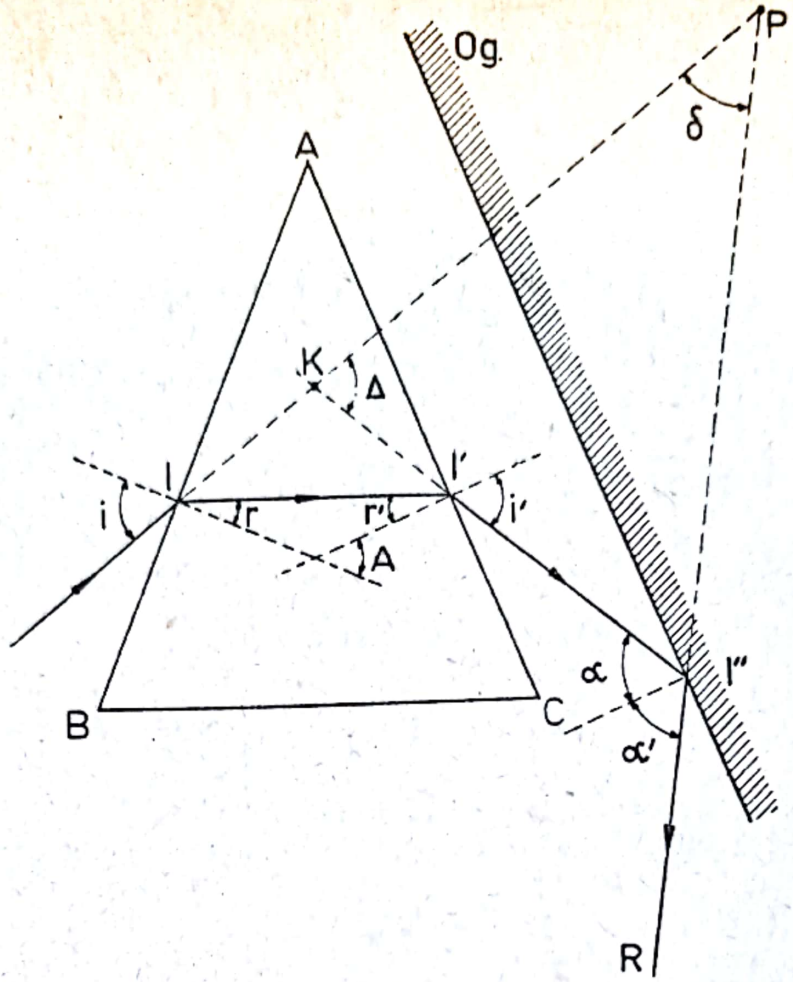


Fig. I.24, R.

Să urmărim mersul razei de lumină după ieşirea din prismă (fig. I.24, *R*). Raza emergentă întîlneşte oglinda în punctul I'' şi se reflectă, direcţia razei reflectate fiind $I''R$. Unghiul total de deviaţie dat de sistem (prismă + oglindă) este KPI'' (δ). Din triunghiul KPI'' rezultă imediat:

$$\delta = \pi - \left[\Delta + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] \quad (2) \qquad \text{sau} \quad \delta = 2\alpha - \Delta. \quad (2')$$

Şi cum $\alpha = \alpha' = i = i'$ iar $\Delta = 2i - A$, rezultă că $\delta = A$.

1974

4.1. *a*) La fiecare ciocnire bila pierde o viteză egală cu kv, unde v este viteza înainte de ciocnire, deci viteza după ciocnire va fi

$$v' = v - kv = (1-k)v \quad (1)$$

($1-k$ este coeficientul de restituţie al lui Newton).

Scanned with OKEN Scanner

Viteza înainte de ciocnire este $v = \sqrt{2gh}$. Ținînd seama de sensul vitezelor (fig. I.25, *R*) avem variația de impuls:

$$|\Delta\vec{p}| = mv' - m(-v) = mv(2-k) = (2-k)m\sqrt{2gh}. \qquad (2)$$

b) Înălțimile succesive la care se ridică bila după fiecare ciocnire sînt

$$h_1 = v'^2\frac{1}{2g} = h(1-k)^2,\ h_2 = h_1(1-k)^2 = h(1-k)^4, \ldots,\ h_n = h(1-k)^{2n}, \ldots \qquad (3)$$

Timpul total, de coborîre, de contact cu podeaua și de urcare, la fiecare ciocnire cu podeaua este:

$$t_1 = \sqrt{2h/g} + f\sqrt{2h/g} + \sqrt{2h_1/g} = (2 + f - k)\sqrt{2h/g},$$

$$t_2 = (2 + f - k)\sqrt{2h_1/g} = t_1(1 - k), \ldots,\ t_n = t_1(1 - k)^{n-1}. \qquad (4)$$

Timpul total pînă la oprirea definitivă a bilei:

$$T = t_1[1 + (1-k) + (1-k)^2 + \ldots] = t_1\frac{1}{1-(1-k)} = \frac{t_1}{k} = \frac{2 + f - k}{k}\sqrt{\frac{2h}{g}}; \qquad (5)$$

am însumat aici progresia geometrică infinită.

Se poate calcula timpul a n ciocniri succesive cu podeaua:

$$T_n = t_1\frac{1 - (1-k)^n}{1 - (1-k)} \qquad (6)$$

și apoi se poate trece la limită pentru $n \to \infty$. Atunci $(1-k)^n$ dispare deoarece $1 - k$ este subunitar.

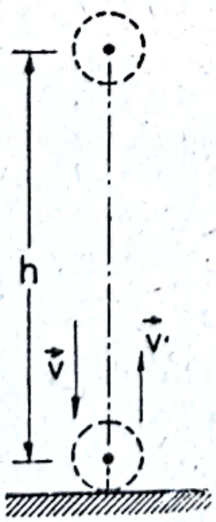


Fig. I.25, R.

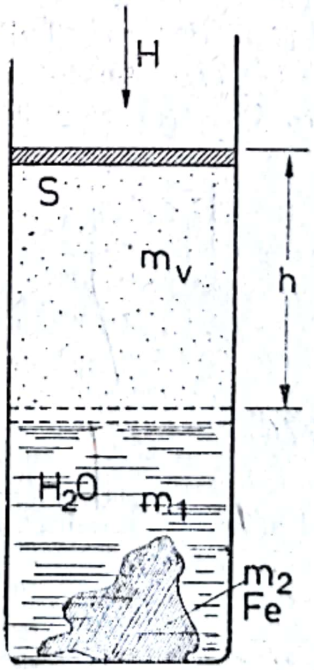


Fig. I.26, R.

Scanned with OKEN Scanner

4.2. Căldura necesară apei pentru a se încălzi pînă la temperatura de fierbere θ_f:

$$Q_{nec} = m_1 c_1(\theta_f - \theta_1) = 1{,}00\ \text{kg} \cdot 4\,180\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \cdot 100\ \text{K} = 418\ \text{kJ}. \qquad (1)$$

Căldura cedată prin răcirea fierului pînă la θ_f:

$$Q_{ced} = m_2 c_2(\theta_2 - \theta_f) = 1{,}00\ \text{kg} \cdot 500\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}} \cdot 1\,000\ \text{K} = 500\ \text{kJ}. \qquad (2)$$

Prin urmare, apa va ajunge la temperatura de fierbere $\theta_f = 100°\text{C}$ și căldura rămasă disponibilă, servește pentru a vaporiza o masă m_v de vapori și pentru a efectua (datorită pistonului) lucru mecanic împotriva presiunii atmosferice (fig. I.26. *R*):

$$Q_{ced} - Q_{nec} = m_v \lambda_v + H \cdot Sh. \qquad (3)$$

Folosind ecuația de stare, valabilă și pentru vaporii saturanți:

$$H \cdot Sh = \frac{m_v}{\mu} RT_f, \text{ găsim} \qquad (4)$$

$$m_v = \frac{Q_{ced} - Q_{nec}}{\lambda_v + RT_f/\mu} = \frac{(500 - 418)\ \text{kJ}}{2{,}25 \cdot 10^3\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} + 8{,}3\ \frac{\text{kJ}}{\text{kmol}\cdot\text{K}} \cdot 373\ \text{K}\ \frac{1}{18\ \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}}} = 33{,}8\text{g} \qquad (5)$$

și din ecuația precedentă: $h = \frac{1}{HS}\frac{m_v}{\mu} RT_f = 0{,}57\ \text{m}.$ (6)

4.3. *a*) Generatorul van de Graaf este o mașină electrostatică care are la bază fenomenul de electrizare prin influență. Are ca parte principală o sferă metalică de rază *R* care culege sarcinile electrice de pe banda transportoare prin intermediul colectorului *P'* (fig. I.27, *R*). Banda transportoare, confecționată din pînză cauciucată, primește sarcinile electrice de la un generator de înaltă tensiune (*G.I.T.*) în modul următor: în regiunea vîrfurilor periei *P*, cîmpul electric foarte puternic produce ionizarea aerului (apar ioni pozitivi, ioni negativi și electroni). Ionii negativi și electronii sînt atrași de vîrfurile periei *P*, în timp ce ionii pozitivi sînt proiectați pe banda transportoare. Banda este pusă în mișcare uniformă de un motor prin intermediul unui tambur T_1. Sarcinile pozitive aduse de bandă în interiorul sferei metalice fac să apară, prin influență, sarcini negative pe fața interioară a sferei și sarcini pozitive pe fața sa exterioară. Prin intermediul periei *P'* sarcinile negative neutralizează sarcinile pozitive de pe bandă. Prin urmare, în final, pe fața exterioară a sferei rămîn doar sarcini pozitive.

b) Puterea consumată pentru încărcarea sferei este dată de relația:

$$P_1 = P_M - P \qquad (1)$$

unde: P_M este puterea motorului, iar $P = F \cdot v$ este puterea consumată pentru transportarea benzii cu viteza constantă *v*.

Pe de altă parte, puterea consumată la încărcarea sferei este egală cu: $\frac{W_1}{t_1}$ (2), unde W_1 este energia înmagazinată la încărcare, iar t_1, timpul de încărcare.

Scanned with OKEN Scanner

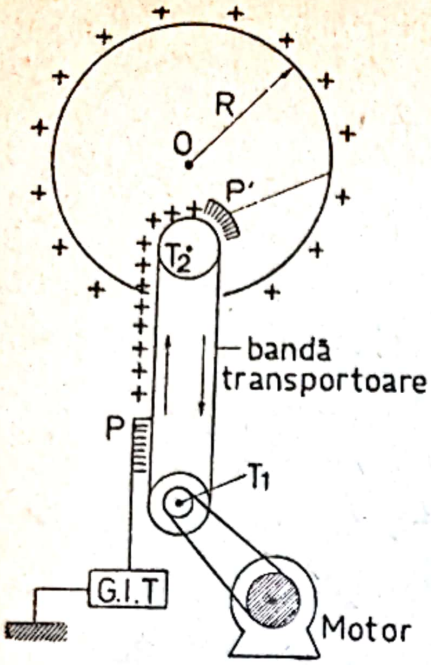


Fig. I.27, R.

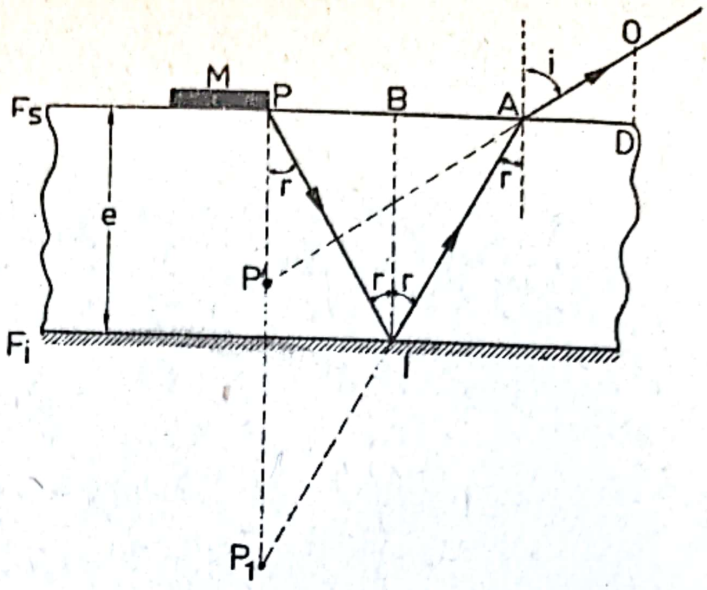


Fig. I.28, R.

Cum :

$$W_1 = \frac{1}{2}\ CV^2 = \frac{1}{2} \cdot 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R \cdot V^2 \qquad (3)$$

rezultă că :

$$t_1 = \frac{W_1}{P_1} = \frac{\frac{1}{2}\ 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R \cdot V^2}{P_M - F \cdot v}.$$

Făcînd înlocuirile cu date numerice, obținem : $t_1 = \frac{5{,}2 \cdot 10^2}{100}\ \frac{\text{J}}{\text{W}} = 5{,}2$ s.

c) Se știe că $\sigma = \frac{Q}{S}$, unde :

Q este sarcina electrică depusă pe banda transportoare în timpul t_1 și S — suprafața benzii ce trece în dreptul colectorului în timpul t_1.

Cum $Q = C \cdot V$ și $S = l \cdot b = vt_1 b$ urmează că : $\sigma = \frac{CV}{vt_1 b}$.

Înlocuind cu datele numerice, obținem :

$$\sigma = \frac{1{,}66 \cdot 10^{-10}\ \text{F} \cdot 2{,}5 \cdot 10^6\ V}{1\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 5{,}2\ \text{s} \cdot 0{,}4\ \text{m}} = 2 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{C}}{\text{m}^2}.$$

4.4. Să studiem mersul razei de lumină ce pleacă din punctul P de la marginea corpului M (fig. I.28, *R*). Prin construcție grafică se poate găsi imediat imaginea virtuală a punctului P în oglinda plană F_i, fie P_1 acest punct. Imagimea lui P_1 în dioptrul plan F_s este P'. (Se obține prin intersecția dreptelor AO și P_1P.)

Scanned with OKEN Scanner

Urmează să se determine relaţia dintre PA, grosimea lamei (e) şi unghiul i.

Din triunghiul PBI avem:

$$e = PI \cos r, \text{ cum } PI = \frac{PB}{\sin r} \text{ rezultă: } e = \frac{PB \cos r'}{\sin r_1} = \frac{PA \cos r}{2 \sin r}. \quad (1)$$

Aplicînd legea refracţiei în punctul A avem:

$$n \sin r = \sin i \text{ sau } \sin r = \frac{\sin i}{n}. \quad (2)$$

Înlocuind relaţia (2) în (1) şi ţinînd seama de faptul că:

$$\cos r = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}, \text{ obţinem:}$$

$$e = \frac{PA}{2} \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}}{\frac{\sin i}{n}} = \frac{PA}{2} \sqrt{\frac{n^2}{\sin^2 i} - 1}. \quad (3)$$

Această relaţie se poate scrie sub forma: $e = kd$. (4)

unde: $k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n^2}{\sin^2 i} - 1}$.

Unghiul i şi indicele de refracţie fiind cunoscuţi, grosimea lamei este proporţională cu distanţa $PA = d$.

Precizia măsurării. Eroarea relativă în aprecierea lui e este egală cu eroarea relativă în aprecierea lui d:

$$\frac{\Delta e}{e} = \frac{\Delta d}{d}.$$

Vom obţine deci o precizie de $\frac{1}{100}$ în determinarea lui e dacă măsurăm distanţa cu o precizie de $\frac{1}{100}$. Tot acest calcul presupune, evident, constanţa lui k. Or, prin vizarea lui P' fără anumite precauţiuni, unghiul i nu este perfect definit; k va avea, deci, valori diferite la fiecare observare. Utilizarea unui echer (AOD, fig. I.28, R) permite să se obţină o linie de vizare bine determinată.

4.5. Vezi problema 2.1.

4.6. *a*) Căldura este absorbită la încălzirea izocoră 1—2 (fig. I.29, R):

$$Q_{abs} = \nu C_v (T_2 - T_1) \quad (1)$$

şi cedată la răcirea izocoră 3—4:

$$Q_{ced} = \nu C_v (T_4 - T_3). \quad (2)$$

Prin urmare, randamentul ciclului

$$\eta = \frac{L}{Q_{abs}} = \frac{Q_{abs} - Q_{ced}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{T_4 - T_3}{T_2 - T_1}. \quad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

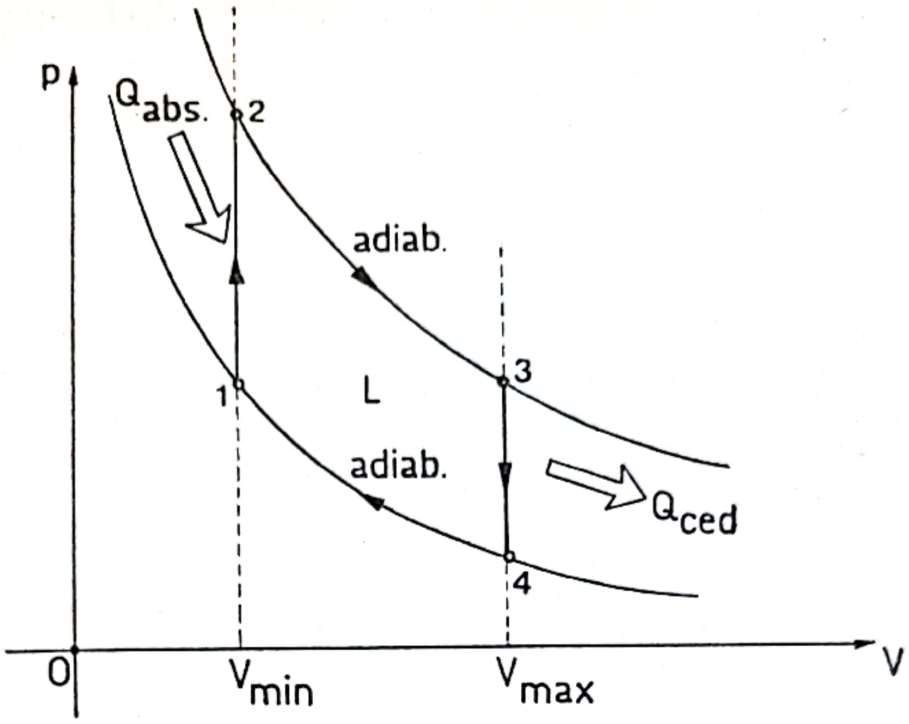


Fig. I.29, R.

Pe de altă parte, din ecuația adiabatei

$$pV^{\gamma} = \text{const.}, \text{ sau } TV^{\gamma-1} = \text{const.} \tag{4}$$

rezultă

$$\left(\frac{V_{max}}{V_{min}}\right)^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_4}. \tag{5}$$

Din proprietățile rapoartelor egale:

$$\varepsilon^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_4}, \tag{6}$$

deci randamentul $$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}, \tag{7}$$

de unde

$$\varepsilon^{\gamma-1} = \frac{1}{1-\eta} \text{ sau } \left(\frac{9}{4}\right)^{\gamma-1} = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}, \ \gamma = 1{,}5. \tag{8}$$

b) Din (6) avem

$$T_3 - T_4 = (T_2 - T_1)\frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 100 \text{ grd} \cdot \frac{2}{3} = 66{,}7 \text{ grd}. \tag{9}$$

c) Din formula randamentului avem

$$Q_{abs} = \frac{L}{\eta} = \nu C_v (T_2 - T_1). \tag{10}$$

Dar din relația lui J. R. Mayer $C_p - C_v = R$ (11)

avem prin împărțire la C_v: $\gamma - 1 = \frac{R}{C_v}$, $C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$ (12)

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și atunci (10) dă

$$\nu = \frac{L}{\eta C_t(T_2 - T_1)} = \frac{L(\gamma - 1)}{\eta R(T_2 - T_1)} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 4{,}18 \text{ J } (1{,}5 - 1)}{\frac{1}{3} \cdot 8{,}3 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}} \cdot 100 \text{ K}} = 0{,}75 \text{ kmol.}$$

(13)

4.7. *a*) Fluxul magnetic este dat de relația:

$$\Phi = BS = \pi r^2 B = \pi r^2 \, B_{max} \sin \omega t,$$

deci expresia tensiunii electromotoare va fi:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi r^2 \omega B_{max} \cos \omega t.$$

b) Fie R rezistența spirei. Într-un interval de timp infinit de mic dt, energia degajată sub formă de căldură, prin efect Joule, este:

$$dW = UIdt = \frac{U^2}{R} dt, \text{ unde } U = e, \text{ așadar } dW = \frac{e^2}{R} \cdot dt.$$

Energia degajată într-o perioadă (T) va fi:

$$W_T = \int_0^T \frac{e^2}{R} \cdot dt = \frac{1}{R} \int_0^T (\pi R^2 \omega \cdot B_{max})^2 \cos^2 \omega t dt;$$

$$W_T = \frac{1}{R}(\pi r^2 \omega B_{max})^2 \int_0^T \cos^2 \omega t \, dt = \frac{1}{R}(\pi r^2 \omega B_{max})^2 \cdot \frac{1}{2} T \qquad (1)$$

Puterea degajată prin efect Joule va fi:

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{2R}(\pi r^2 \omega B_{max})^2 \qquad (2)$$

sau, ținînd seama de faptul că $R = \frac{\rho \cdot l}{S} = \rho \frac{2\pi r}{S}$ vom avea:

$$P = \frac{S(\pi r^2 \omega B_{max})^2}{4\rho\pi r} = \frac{S\pi r^3 \omega^2 B^2_{max}}{4\rho}. \qquad (2')$$

Neglijînd variația rezistenței cu temperatura cum și dilatarea spirei energia degajată în timpul t va fi:

$$W_t = P \cdot t = \frac{S\pi r^3 \omega^2 B^2_{max}}{4\rho} t. \qquad (3)$$

Energia utilizată pentru încălzirea spirei de la temperatura mediului ambiant (θ_1) pînă la punctul de topire (t_T) va fi:

$W_Q = mc(t_T - \theta_1)$ sau, știind că $m = S2\pi r\delta$, avem:

$$W_Q = S2\pi r\delta c \, (t_T - \theta_1). \qquad (4)$$

Ținînd seama de faptul că: $W_t = W_Q$, din relațiile (3) și (4) obținem:

$$B_{max} = \sqrt{\frac{8\delta\rho c(t_T - \theta_1)}{r^2 \omega^2 t}} \quad \text{sau:} \quad B_{max} = \frac{2}{r\omega} \sqrt{\frac{2\delta\rho c(t_T - \theta_1)}{t}}. \qquad (5)$$

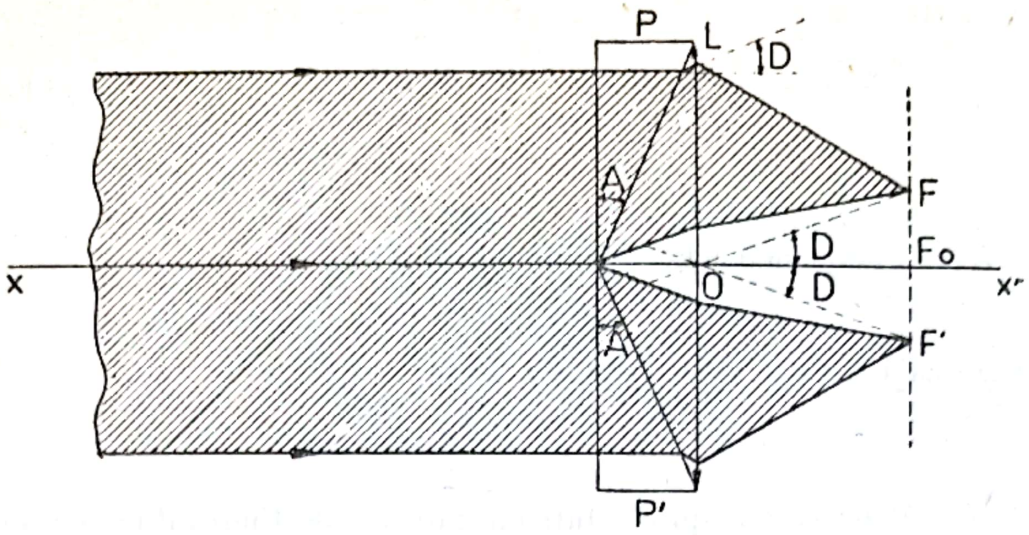


Fig. I.30, R.

c) În clipa în care o mică porțiune din circuit s-a topit, circuitul se întrerupe, deci $I = 0$. Tensiunea la capetele circuitului astfel obținut va fi:

$$U = -e, \text{ unde } e = -\pi r^2 \omega \cdot B_{max} \cos \omega t, \text{ deci: } U = \pi r^2 \omega B_{max} \cos \omega t. \quad (6)$$

Introducînd expresia lui B_{max} din relația (5) în relația (6) obținem:

$$U = 2\pi r \sqrt{\frac{2\delta\rho\, c(t_r - \theta_1)}{t}} \cos \omega t.$$

4.8. *a*) Fasciculul paralel de lumină cade perpendicular pe ansamblul prismelor P și P'; el va fi deviat, la ieșirea din prisme, cu unghiul D (fig. I.30, *R*).

Fasciculele ce părăsesc prismele, fiind paralele cu axele secundare OF și OF', după traversarea lentilei vor converge în F și F'.

b) Din triunghiul OFF_0 se obține:

$FF_0 = OF_0 \cdot \text{tg } D = f \cdot \text{tg } D$, unde f este distanța focală a lentilei L.

În mod analog: $F'F_0 = f \cdot \text{tg } D$, deci $FF' = 2f \cdot \text{tg } D$, sau, cu suficientă aproximație $FF' = 2fD$. (1)

Se știe că unghiul de deviație este dat de relația:

$$D = i + i' - A, \quad (2)$$

dar pentru prisme de unghi mic se pot face următoarele aproximări: $i = nr$ și $i' = nr'$. Deci: $D = (n-1)A$. (2')

Înlocuind pe (2') în (1) avem:

$$FF' = 2f(n-1)A, \text{ de unde } A = \frac{FF'}{2f(n-1)}.$$

Aplicație numerică

$$A = \frac{8{,}4}{2 \cdot 60 \cdot 0{,}5} \approx 0{,}14 \text{ rad. sau, în grade, } A = 0{,}14 \frac{360}{2\pi} \cong 8°.$$

c) Îndepărtînd în mod progresiv cele două prisme, prin mișcări de translație opuse, după o direcție perpendiculară pe axa principală, direcția fas-

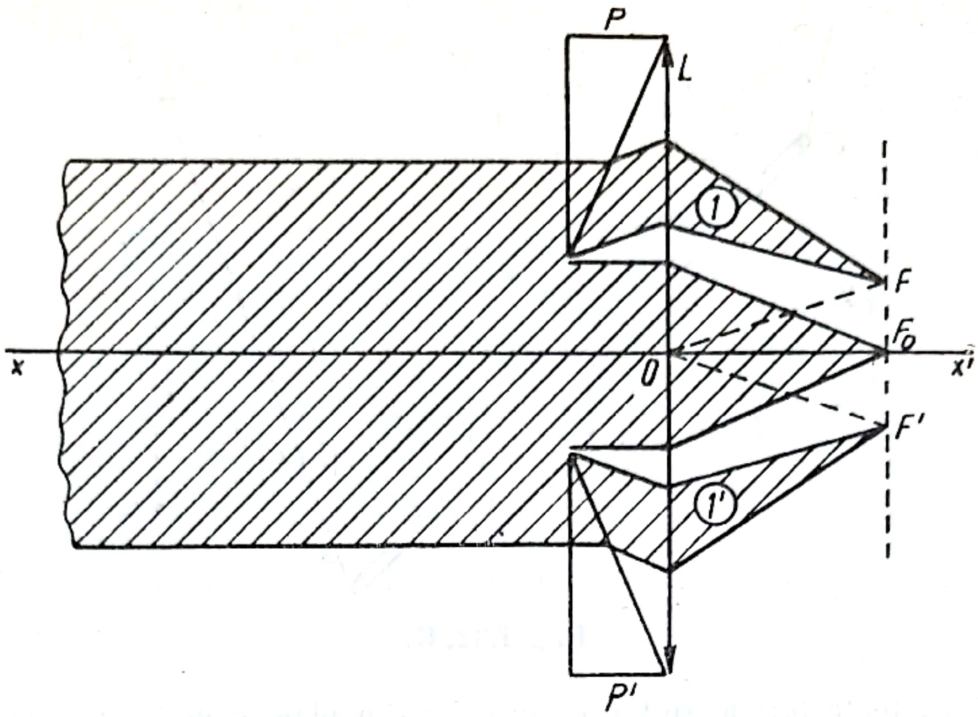


Fig. I.31, R.

ciculelor convergente din prismă nu se modifică. Fasciculele 1 și 1′ (fig. I.31, *R*) după străbaterea lentilei, vor converge tot în F și F'. Partea centrală a fasciculului incident traversează lentila L și converge în focarul principal al lentilei F_0.

Pe măsură ce prismele se îndepărtează una față de alta, strălucirea imaginii centrale crește în timp ce aceea a imaginilor F și F' scade. Continuînd să îndepărtăm prismele, astfel ca pe ele să nu mai cadă lumină, tot fasciculul incident va converge, după străbaterea lentilei, în F_0.

1975

5.1. La echilibru tensiunea din fir este egală în mărime cu greutatea $\vec{P}$. Prin urmare, bara este supusă la 3 forțe : greutatea $\vec{G}$, tensiunea $\vec{P}$ din fir și reacțiunea articulației $\vec{R}$ (fig. I.32, *R*).

Reamintim condițiile de echilibru ale unui rigid : *a*) rezultanta tuturor forțelor trebuie să fie egală cu zero (este o ecuație vectorială, echivalentă, în general, cu 3 ecuații algebrice, obținute prin proiectarea ecuației vectoriale pe trei axe de coordonate), și *b*) momentul rezultant al tuturor forțelor față de un punct (pol) oarecare trebuie să fie egal cu zero (este o ecuație vectorială, echivalentă, în general, cu trei ecuații algebrice). Prin urmare, avem în general 6 ecuații universale de echilibru a unui rigid : trei pentru forța rezultantă (condiția de echilibru a centrului de masă sau de echilibru la translație) și trei pentru momentul rezultant (condiția de echilibru la rotații în jurul CM). (Reamintim și teorema : dacă rezultanta tuturor forțelor este nulă, momentul rezultant nu depinde de alegerea polului față de care îl calculăm).

Scanned with OKEN Scanner

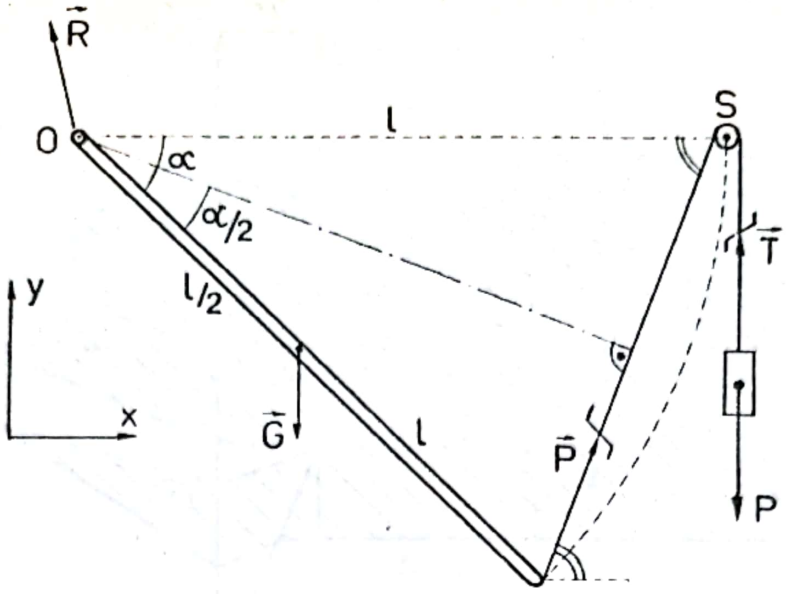


Fig. I.32, R.

Dacă toate forțele sînt conținute într-un plan, condiția de anulare a rezultantei dă două ecuații, iar condiția de anulare a momentului dă o singură ecuație.

În cazul problemei noastre, prima condiție:

$$\vec{G} + \vec{P} + \vec{R} = 0, \tag{1}$$

proiectată pe cele două axe $(Ox,\ O_y)$ dă:

$$P\cos(\pi/2 - \alpha/2) + R_x = 0,\ R_x = -P\sin\alpha/2,$$
$$P\sin(\pi/2 - \alpha/2) - G + R_y = 0,\ R_y = G - P\cos\alpha/2. \tag{2}$$

Aceste ecuații ne dau reacțiunea articulației O asupra barei.

Condiția a doua de echilibru, cea a momentelor, față de articulatie, dă

$$Pl\cos\alpha/2 - G\frac{l}{2}\cos\alpha = 0 \text{ sau } P\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{G}{2}\cos\alpha. \tag{3}$$

Din punct de vedere fizic se vede din figură că pentru P suficient de mare, unghiul α va fi foarte mic, bara va fi aproape orizontală (anume, pentru $P \to G/2$). Pentru P foarte mic, α va fi aproape 90° (bara aproape verticală). Prin urmare, P trebuie să fie mai mic ca $G/2$.

Înlocuind $\cos\alpha$ cu $2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, ecuația (3) devine

$$2G\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2P\cos\frac{\alpha}{2} - G = 0 \quad (4), \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2G}\left(P \pm \sqrt{P^2 + 2G^2}\right). \tag{5}$$

Ne interesează numai soluția $\alpha \in (0, \pi/2)$, deci luăm semnul plus în fața radicalului.

Desigur membrul drept trebuie să fie subunitar; prin ridicare la pătrat obținem:

$$P\sqrt{P^2 + 2G^2} < G^2 - P^2. \tag{6}$$

Scanned with OKEN Scanner

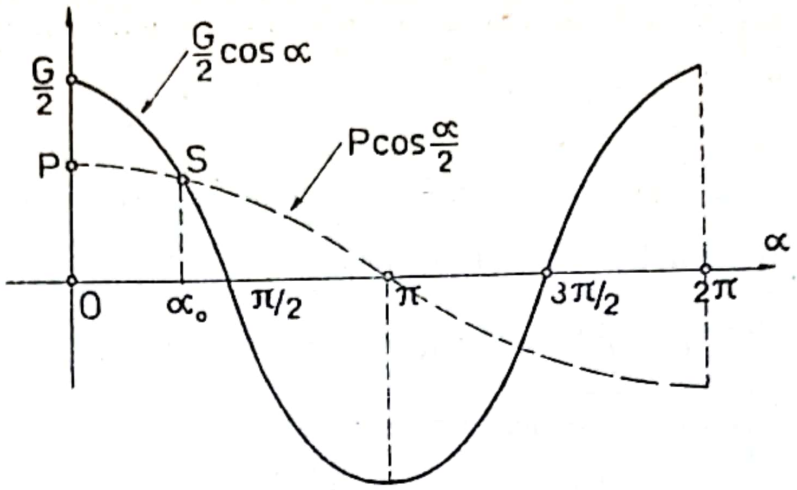


Fig. I.33, R.

Ridicînd încă o dată la pătrat (membrul drept fiind pozitiv), obținem condiția deja amintită :

$$P < G/2. \tag{7}$$

(Cînd $P \to G/2$, atunci $\alpha \to 0$, poziția limită $\alpha = 0$ nu se poate obține riguros în principiu).

Stabilitatea poziției de echilibru se poate studia foarte comod grafic și anume, reprezentăm momentele $M_G = \frac{G}{2}\cos\alpha$ și $M_P = P\cos\frac{\alpha}{2}$ în funcție de α (fig. I.33, *R*).

Se vede și din grafic că pentru $P \to \frac{G}{2}$, $\alpha_0 \to 0$, iar pentru $P \to 0$, $\alpha_0 \to \pi/2$.

Dacă acum unghiul α al barei crește peste valoarea de echilibru α_0, momentul M_P va fi mai mare decît M_G, deci tensiunea P va readuce bara înapoi. Invers, dacă α scade sub α_0, M_G devine mai mare decît M_P și greutatea G readuce bara înapoi în poziția de echilibru. Prin urmare, poziția de echilibru este stabilă.

5.2. Fie, pentru concretizare, $E_1 < E_2$. Legea conservării impulsului

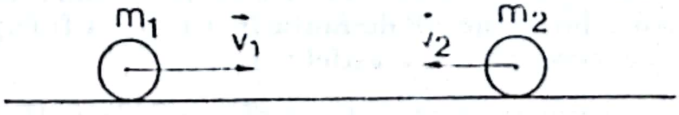
$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}, \tag{1}$$

proiectată pe direcția mișcării, cu sensul pozitiv ales după v_1, dă (fig. I.34, *R*) :

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v, \quad v = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

Trebuie deci, ca $v > 0$ sau $m_1v_1 > m_2v_2$. (3)

Fig. I.34, R.



Pe de altă parte vitezele se obțin din energiile cinetice date:

$$v_1 = \sqrt{2E_1/m_1}, \qquad v_2 = \sqrt{2E_2/m_2}, \tag{4}$$

astfel încît

$$m_1\sqrt{2E/m_1} > m_2\sqrt{2E_2/m_2},\ \sqrt{m_1E_1} > \sqrt{m_2E_2} \text{ sau } m_1E_1 > m_2E_2. \tag{5}$$

5.3. *a*) Neglijînd dilatarea balonului, aerul din balon suferă o transformare izocoră:

$$T = T_0\frac{p}{p_0} = 273\ \text{K}\,\frac{815}{760} = 293\ \text{K} = 20°\text{C}. \tag{1}$$

b) În acest caz, presiunea vaporilor este (la $\theta = 20°\text{C}$):

$$p_v = Up_s = 0{,}60\cdot 17{,}5\ \text{Torr} = 10{,}5\ \text{Torr}. \tag{2}$$

La 0°C presiunea vaporilor ar deveni

$$p' = p_v\frac{T_0}{T} = 10{,}5\ \text{Torr}\,\frac{273}{293} = 9{,}78\ \text{Torr}, \tag{3}$$

dar presiunea vaporilor saturanți la 0°C este $p_{s0} = 4{,}58$ Torr, deci înainte de a ajunge la 0°C vaporii parțial se condensează. Anume, făcînd o interpolare liniară:

$$\begin{array}{l} p_s - p_{s0} \quad \ldots\ldots\ \theta \\ p' - p_{s0} \quad \ldots\ldots\ \theta_x \end{array}$$

$$\theta_x = \theta\,\frac{p' - p_{s0}}{p_s - p_{s0}} = 20°\text{C}\,\frac{9{,}78 - 4{,}58}{17{,}5 - 4{,}58} \approx 4°\text{C}, \tag{4}$$

deci cam de la 4°C vaporii devin saturanți și începe condensarea lor.

Prin urmare, la 0°C avem în rezervor aer, vapori saturanți (la presiunea $p_{s0} = 4{,}58$ Torr) și puțină apă (volumul apei poate fi neglijat). Presiunea în acest caz trebuie să fie normală (conform enunțului problemei), deci presiunea aerului este (la 0°C):

$$p_a = p_0 - p_{s0},\ (p_0 = 760\ \text{Torr}). \tag{5}$$

La temperatura măsurată presiunea aerului umed se compune din presiunea aerului $(p_0 - p_{s0})T_x/T_0$ și din presiunea vaporilor $Up_s\ T_x/T$, anume

$$p = (p_0 - p_{s0})\frac{T_x}{T_0} + Up_s\frac{T_x}{T}, \tag{6}$$

de unde temperatura căutată

$$T_x = \frac{p}{(p_0 - p_{s0})/T_0 + Up_s/T} = \frac{815}{(760 - 4{,}58) : 273 + 0{,}60\cdot 17{,}5 : 293} =$$

$$= 291\ \text{K} = 18°\text{C}. \tag{7}$$

(Vaporii vor fi nesaturanți, deoarece sîntem mult peste cele 4°C găsite în ecuația 4.)

5.4. *a*) Considerînd că electronii ies din catod cu viteză nulă, energia cinetică a lor, dincolo de fanta F, va putea fi exprimată în funcție de tensiunea de accelerare U_1 astfel:

$$E_c = eU_1 = 768\cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a dubla viteza electronilor, deci $v = 2v_1$, urmează că :

$$E'_c = \frac{m\cdot(2v_1)^2}{2} = 4\,\frac{mv_1^2}{2} = 4E_c = 4eU_1 = eU'.$$

Aşadar, noua tensiune de accelerare va fi : $U' = 4U_1$.

Înlocuind cu date numerice, obţinem :

$$U' = 4\cdot 480 = 1\,920 \text{ V}.$$

b) Electronii, intrînd între armăturile condensatorului unde acţionează simultan două cîmpuri încrucişate, unul electric $\vec{E}$, şi altul magnetic $\vec{B}$, vor fi supuşi în acelaşi timp la acţiunea a două forţe ce acţionează după acelaşi suport dar de sens contrar: forţa electrostatică $\vec{F}_e$ şi forţa lorentziană $\vec{F}_L$ (fig. I.35, *R*). Pentru ca deviaţia spotului pe ecran să fie nulă trebuie ca :

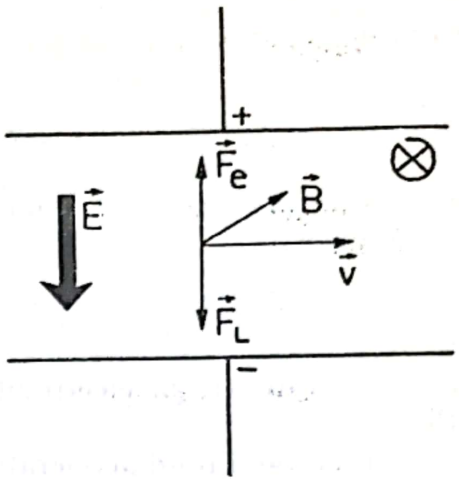


Fig. I.35, R.

$\vec{F}_L = -\vec{F}_e$ sau, în modul, $|\vec{F}_L| = |\vec{F}_e|$ adică $ev_1 B = e\frac{U_2}{d}$ (1) de unde $B = \frac{U_2}{v_1 d}$ (1').

Dar : $\frac{mv_1^2}{2} = eU_1$, deci $v_1 = \sqrt{\frac{2eU_1}{m}}$. (2)

Înlocuind pe (2) în (1') obţinem :

$$B = \frac{U_2}{d\sqrt{\frac{2eU_1}{m}}} = \frac{U_2}{d}\sqrt{\frac{m}{2eU_1}}. \quad (3)$$

Făcînd înlocuirile cu date numerice, obţinem : $B \simeq 10^{-3}$ T.

Din relaţia (3) se poate explicita $\frac{e}{m}$ şi anume : $\frac{e}{m} = \frac{U_2^2}{2d^2B^2U_1}$.

Înlocuind cu date numerice, obţinem :

$$\frac{e}{m} = \frac{(1\,300)^2}{2(10^{-1})^2(10^{-3})^2 480} \approx 0{,}17\cdot 10^{12}\ \frac{\text{C}}{\text{kg}}.$$

5.5. Fasciculul de electroni, accelerat între catod şi anod, ajungînd pe cristalul C (fig. I.36, *R*) se reflectă pe planele reticulare difractante şi apoi interferă. Unda rezultantă după interferenţă prezintă maximum de amplitudine dacă diferenţa de drum (δ) îndeplineşte condiţia :

$$2d \sin \theta = k\lambda. \quad (1)$$

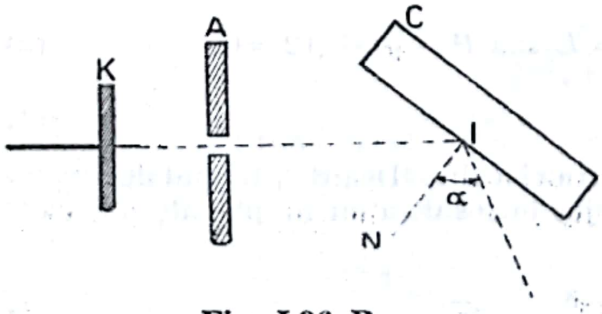


Fig. I.36, R.

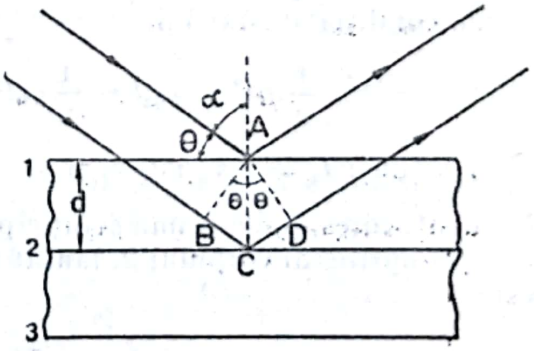


Fig. I.37, R.

Unghiul 0, în cazul problemei, este $\frac{\pi}{2} - \alpha$ (fig. I.37, *R*). Aşadar :

$$2d \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = k\lambda. \qquad (1')$$

Lungimea de undă a undei asociate electronilor este dată de relaţia lui de Broglie :

$$\lambda = \frac{h}{mv} \qquad (2)$$

unde : v este viteza electronilor, m — masa electronului, h — constanta lui Planck.

Electronii fiind accelerați sub tensiunea de accelerare U, viteza lor va fi dată de relaţia :

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \qquad (3)$$

Înlocuind pe (3) în (2) obţinem :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}. \qquad (2')$$

Introducînd pe (2') în (1'), avem :

$$2d \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = k\frac{h}{\sqrt{2meU}}, \text{ de unde } U = \frac{k^2h^2}{8med^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

Ţinînd seama de datele problemei, rezultă :

$$U = \frac{4 \cdot (6{,}63 \cdot 10^{-34})^2}{8 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} (2 \cdot 10^{-10})^2 \frac{1}{4}} \approx 156 \text{ V}.$$

5.6. Ştiind că acceleraţiile la coborîre şi la urcare pe un plan înclinat sînt :

$$a_c = g(\sin\alpha - \mu_1 \cos\alpha) = \frac{5}{2} \text{ m/s}^2, \qquad (1)$$

$$a_u = -g(\sin\alpha + \mu_1 \cos\alpha) = -\frac{15}{2} \text{ m/s}^2,$$

avem condiţia de întîlnire :

$$\frac{1}{2}a_c t^2 + v_{02}t + \frac{1}{2}a_u t^2 = L \text{ sau } t^2 - 8t + 12 = 0 \qquad (2)$$

cu soluţiile : $t_1 = 2$ s şi $t_2 = 6$ s. (3)

Evident, corespunde prima soluţie pentru ciocnire. Dealtfel, timpul de urcare, pînă la oprire, al corpului 2, lansat de jos în sus de-a lungul planului înclinat, este

$$t_u = \frac{v_{02}}{-a_u} = \frac{8}{3} = 2{,}67 \text{ s}, \qquad (4)$$

Scanned with OKEN Scanner

deci corpurile se ciocnesc înainte ca cel de-al doilea corp să ajungă la înălțimea sa maximă.

Vitezele corpurilor imediat înainte de ciocnire sînt:

$$v_1 = a_c t = 5{,}0 \text{ m/s}, \qquad v_2 = v_{02} + a_u t = 5{,}0 \text{ m/s} \tag{5}$$

la o distanță de baza planului înclinat egală cu:

$$s_2 = v_{02} t + a_u t^2/2 = 25 \text{ m}. \tag{6}$$

După ciocnirea plastică viteza corpului rezultat va fi (din legea conservării impulsului):

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v, \quad v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 3{,}0 \text{ m/s}. \tag{7}$$

Corpul rezultat ajunge la baza planului cu viteza

$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2 a_c s_2} \tag{8}$$

și apoi la pendul cu viteza

$$v' = \sqrt{v_0^2 - 2\mu_2 g d} = \sqrt{v^2 + 2 a_c s_2 - 2\mu_2 g d} = 7{,}0 \text{ m/s}. \tag{9}$$

(La mișcarea liberă pe plan orizontal cu frecare accelerația este $-\mu g$).

La ciocnirea perfect elastică se conservă atît impulsul total al sistemului, cît și energia cinetică totală a sistemului:

$$\begin{gathered} (m_1 + m_2) v' = (m_1 + m_2) v'' + m_3 v_3, \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v''^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2. \end{gathered} \tag{10}$$

Trecînd termenii care conțin pe $(m_1 + m_2)$ în stînga, iar cei care conțin pe m_3 în dreapta și împărțind ecuațiile membru la membru (masele se simplifică), obținem:

$$v' + v'' = v_3. \tag{11}$$

Reamintim că ciocnirea perfect elastică a două bile (frontală și centrică) este definită și prin coeficientul de restituție $k = 1$:

$$k = -\frac{v_3 - v''}{-v'} = 1, \text{ de unde } v_3 - v'' = v' \tag{12}$$

ceea ce coincide cu (11), astfel încît din prima ecuație (10) găsim

$$v_3 = v' \frac{2(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} = 7{,}0 \text{ m/s}. \tag{13}$$

Dealtfel, masele fiind egale ($m_1 + m_2 = m_3 = 10$ kg), corpul de masă m_3 va căpăta prin ciocnirea perfect elastică exact viteza celuilalt corp.

Energia cinetică a pendulului se transformă în energia potențială:

$$\frac{1}{2} m_3 v_3^2 = m_3 g h, \quad h = \frac{v_3^2}{2g}. \tag{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

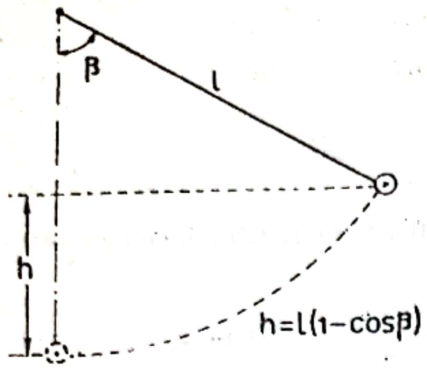


Fig. I.38, R.

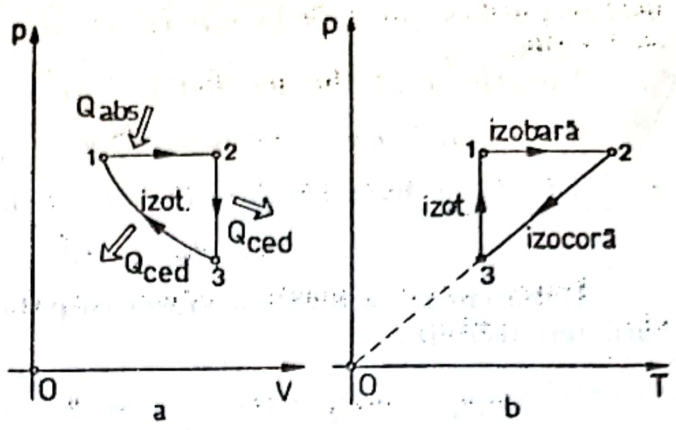


Fig. I.39, R.

Pe de altă parte, conform figurii I.38, *R*

$$h = l - l\cos\beta, \tag{15}$$

deci

$$\cos\beta = 1 - \frac{v_3^2}{2lg} = \frac{1}{2}, \quad \beta = 60°. \tag{16}$$

5.7. *a)* Vezi figura I.39, *R*.

b) Căldura este absorbită pe izobara 1—2 :

$$Q_{abs} = \nu C_p(T_2 - T_1). \tag{1}$$

Căldura este cedată în răcirea izocoră 2—3 și comprimarea izotermă 3—1 :

$$Q_{ced} = \nu C_v(T_2 - T_3) + \nu R T_1 \ln\frac{V_3}{V_1}. \tag{2}$$

Pe de altă parte,

$$\varepsilon = \frac{V_3}{V_1} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad (T_3 = T_1), \tag{3}$$

deci randamentul

$$\eta = \frac{Q_{abs} - Q_{ced}}{Q_{abs}} = \frac{C_p(T_2 - T_1) - C_v(T_2 - T_1) - RT_1\ln\varepsilon}{C_p(T_2 - T_1)}. \tag{4}$$

Împărțind numărătorul și numitorul prin C_vT_1 și ținînd seama că $R = C_p - C_v$ (relația lui R. Mayer), obținem :

$$\eta = \frac{\gamma(\varepsilon-1) - (\varepsilon-1) - (\gamma-1)\ln\varepsilon}{\gamma(\varepsilon-1)} = \frac{(\gamma-1)(\varepsilon - 1 - \ln\varepsilon)}{\gamma(\varepsilon-1)} =$$

$$= \frac{(1{,}4-1)(2-1-\ln 2)}{1{,}4(2-1)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}307}{1{,}4} = 8{,}8\%.$$

c) $\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon} = 50\%$.

După cum era de așteptat $\eta_C > \eta$.

Scanned with OKEN Scanner

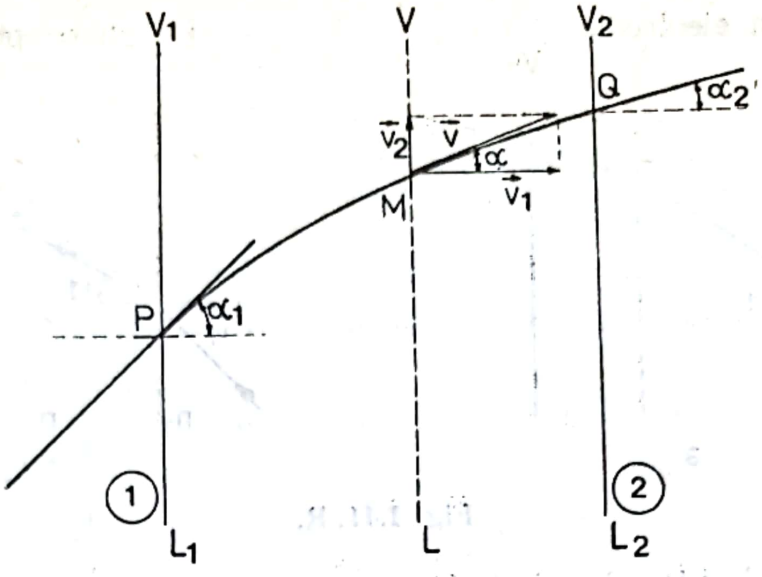


Fig. I.40, R.

5.8. *a)* Presupunînd că $V_2 > V_1$ și $V_1 > 0$, traiectoria este cea indicată în figura I.40, *R*. Teorema variației energiei cinetice, aplicată electronului între sursă și punctul M de potențial V, ne dă:

$$eU = \frac{mv^2}{2}, \tag{1}$$

U fiind tensiunea dintre L și L_1. Considerînd sursa în P și potențialul lui L_1 zero urmează că: $U = V$. Vom putea scrie:

$$eV = \frac{mv^2}{2} \text{ de unde } v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}.$$

Descompunînd vectorul $\vec{v}$ din M, după două direcții perpendiculare, în componentele $\vec{v_1}$ și $\vec{v_2}$ se constată că numai componenta paralelă cu cîmpul se va modifica, în timp ce componenta perpendiculară pe cîmp rămîne constantă.

Deci: $v_2 = v \sin \alpha = \text{const.}$, și cum $v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$, urmează că $v \cdot \sin \alpha = \sqrt{\frac{2e}{m}} \sqrt{V} \sin \alpha = \text{const.}$, sau $\sqrt{V} \cdot \sin \alpha = \text{const.}$ (2)

Pentru punctele P și Q se poate scrie:

$$\sqrt{V_1} \sin \alpha_1 = \sqrt{V_2} \sin \alpha_2. \tag{2'}$$

b) Fie deci două sisteme: unul electronic (I) și altul optic (II) (fig. I.41, *R*, *a* și *b*). Vom distinge două subcazuri: 1 și 2.

1) În cazul sistemului electronic $V_1 < V < V_2$; în cazul sistemului optic $n_1 < n < n_2$.

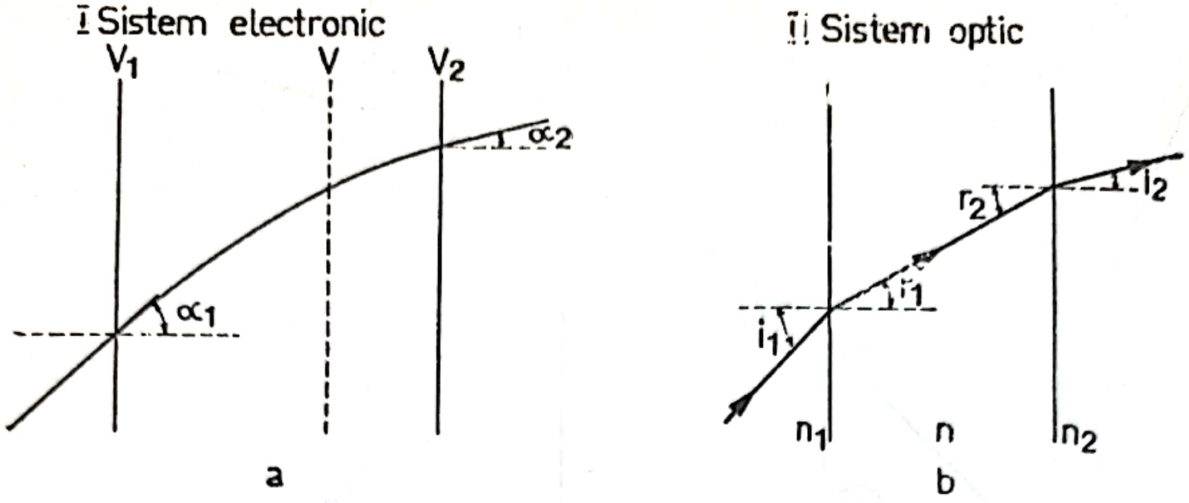


Fig. I.41, R.

În cazul sistemului electronic se știe că:

$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sqrt{V_2}}{\sqrt{V_1}} > 1$ și deci $\alpha_1 > \alpha_2$. Așadar raportul $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$ nu depinde decît de potențialele extreme.

În cazul sistemului optic, dacă se consideră o serie de straturi foarte subțiri de indici de refracție diferiți, unde $n_1 < n' < n'' < n''' < \ldots < n_2$, linia frîntă din figura I.41, *R*, *b* se transformă într-o curbă (ca în cazul sistemului electronic). Și în acest caz $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}$ deci raportul $\frac{\sin i_1}{\sin i_2}$ nu depinde decît de indicii de refracție extremi.

2) Vom considera în cazul sistemului electronic: $V_1 > V > V_2$, iar în cazul sistemului optic: $n_1 > n > n_2$ (fig. I.42, *R*, *a* și *b*).

În cazul sistemului electronic, vom scrie:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sqrt{V_2}}{\sqrt{V_1}}, \text{ cum } V_1 > V_2 \text{ urmează că } \alpha_1 < \alpha_2.$$

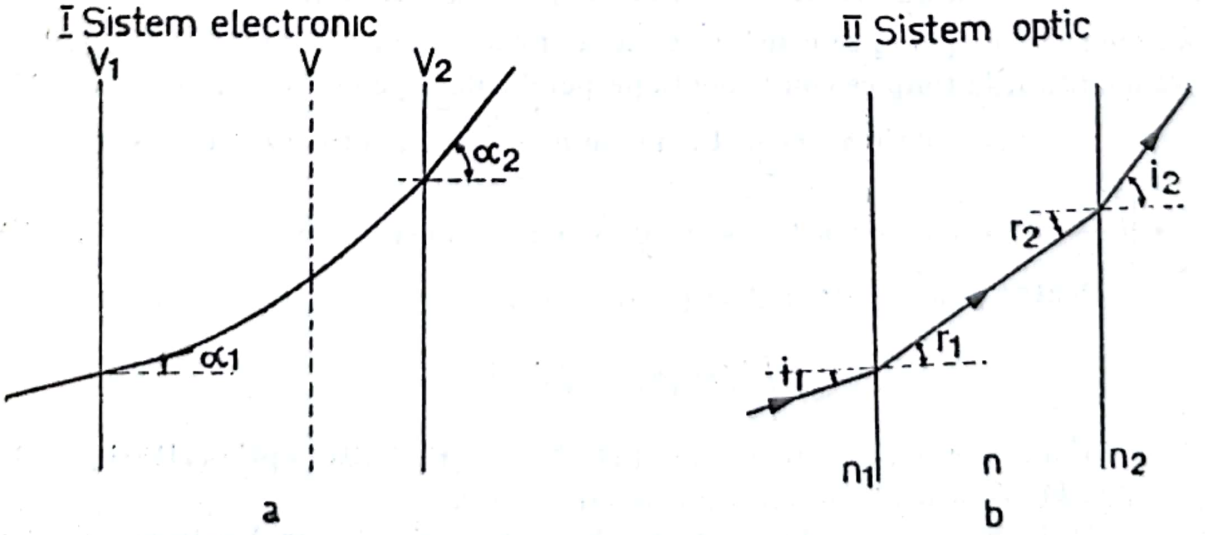


Fig. I.42, R.

În cazul sistemului optic, dacă se consideră din nou o serie de straturi foarte subțiri de indici de refracție diferiți, $n_1 > n' > n'' > \ldots > n_2$, linia frîntă din figura I.42, R, b se transformă într-o curbă cu concavitatea îndreptată în sus.

c) Din relația (1) se poate desprinde că indicelui de refracție absolut n din optică îi corespunde în optica electronică $\sqrt{V}$. Deci indicele de refracție electronic absolut este :

$$n \sim \sqrt{V} \text{ sau } n = k \cdot \sqrt{V}.$$

Indicele de refracție electronic al mediului al doilea față de primul mediu va fi dat de :

$n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{V_2}}{\sqrt{V_1}} = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}}$ sau, în funcție de V_1 și U (unde $U = V_2 - V_1$) :

$\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{1 + \frac{U}{V_1}}$ unde U poate fi pozitiv sau negativ.

5.9. *Metoda I.* Fie două lentile plan concave din sticlă avînd raza de curbură și indicele de refracție cunoscute. Se așază lentilele cu concavitățile față în față iar golul format se umple cu un lichid de indice de refracție n_x necunoscut. Se formează astfel un ansamblu de trei lentile. Convergența sistemului astfel format va fi : $C = C_1 + C_2 + C_3$ și cum $C_1 = C_3$, rezultă că : $C = 2C_1 + C_2$.

Se știe că : $C_1 = C_3 = (n - 1)\frac{1}{R}$ iar $C_2 = (n_x - 1)\frac{2}{R'}$, unde $|R| = |R'|$ dar $R < 0$ (lentilă divergentă) și $R' > 0$ (lentilă convergentă).

Prin urmare convergența sistemului va fi :

$$C = \frac{2(n-1)}{R} + \frac{2(n_x - 1)}{R'} = \frac{1}{F}, \qquad (1)$$

unde F este distanța focală a sistemului.

Se poate constata ușor că $F > 0$, dacă $n_x > n$ și $F < 0$, dacă $n_x < n$. Indicele de refracție n_x se poate deduce din relația (1) în funcție de distanța focală a sistemului. Aceasta poate fi determinată experimental prin metode curente (formarea imaginii unui obiect în lentile convergente sau divergente).

Metoda II. O metodă curentă pentru determinarea indicelui de refracție al unui lichid este aceea în care se utilizează instrumente construite chiar în acest scop : refractometrele. Vom descrie în continuare unul dintre tipurile de refractometre : refractometrul Pulfrich. El este alcătuit dintr-o prismă cu reflexie totală cu indice de refracție N, mai mare decît indicele de refracție n al lichidului de studiat. Pe fața superioară a prismei se găsește o cuvă în care se pune lichidul de cercetat. Cuva este acoperită cu o apărătoare optică D, care are o mică deschidere ce nu permite pătrunderea în vas decît a unui fascicul îngust de raze de lumină, tangent la fața AB a prismei (fig. I.43, R). Razele pătrund în prismă făcînd cu normala un unghi egal cu unghiul limită l, trec mai departe, ajung la fața de ieșire unde fac cu normala un unghi i' și ies din prismă sub unghiul r'. Putem scrie : $i' = \frac{\pi}{2} - l$ deci $\sin i' = \cos l$.

Cum $\sin r' = N \sin i'$, deducem $\sin r' = N \cos l$ de unde : $\cos l = \frac{\sin r'}{N}$ sau

$\sin l = \sqrt{1 - \cos^2 l} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 r'}{N^2}}$.

Scanned with OKEN Scanner

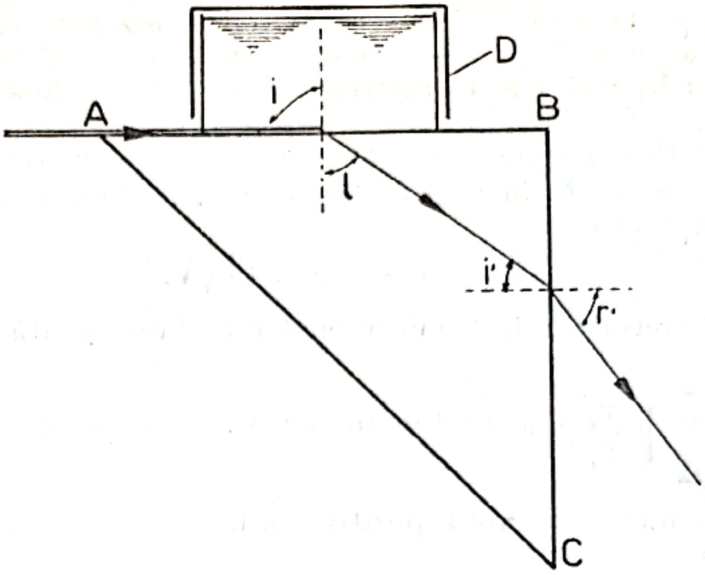


Fig. I.43, R.

Cum $\sin l = \frac{n}{N}$ rezultă că $n = \sqrt{N^2 - \sin^2 r'}$.

Determinarea lui n se reduce la măsurarea unghiului r', ceea ce se poate face cu o lunetă ce se poate deplasa în fața unui cerc gradat.

1976

6.1. Asupra bilei acționează greutatea sa $m\vec{g}$ și reacțiunea normală $\vec{N}$ a emisferei. Asupra emisferei acționează greutatea sa $M\vec{g}$, apăsarea $-\vec{N}$ a bilei și reacțiunea normală $\vec{N'}$, a planului orizontal (fig. I.44, *R*).

Ecuația fundamentală pentru bilă:

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \qquad (1)$$

dă pe direcția orizontală și cea verticală ecuațiile:

$$N \sin \theta = ma_x, \quad N \cos \theta - mg = ma_y. \qquad (2)$$

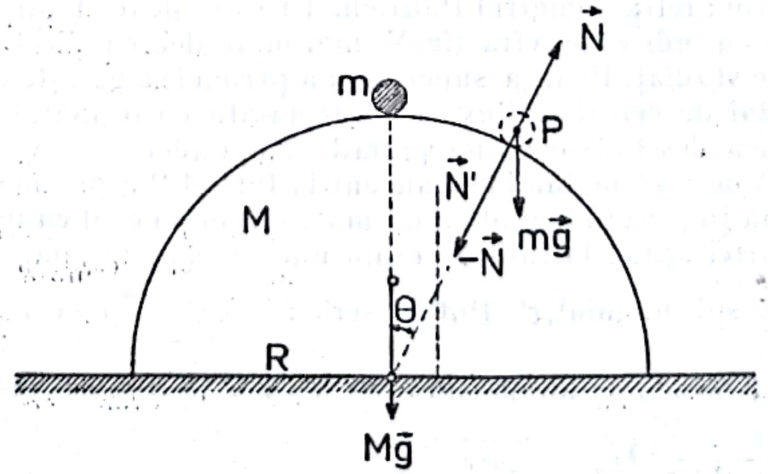


Fig. I.44, R.

Ecuația fundamentală pentru emisferă dă pe direcția orizontală:

$$-N \sin \theta = MA. \tag{3}$$

Din (2) și (3) rezultă imediat

$$ma_x + MA = 0 \text{ sau } mv_x + MV = 0 \text{ sau } mx + MX = 0, \tag{4}$$

ceea ce reprezintă evident conservarea impulsului sistemului pe direcția orizontală, respectiv invariabilitatea abscisei centrului de masă CM (n-avem forță rezultantă orizontală asupra sistemului).

Pe lîngă ecuația (4) de conservare a impulsului, ecuațiile (2) — (3) dau și ecuația de conservare a energiei:

$$mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} M V^2. \tag{5}$$

Reamintim că ecuațiile diferențiale de ordinul doi ale dinamicii punctului material în cazul forțelor conservative admit ca integrale prime legile de conservare.

Atîta timp cît bila nu s-a desprins de emisferă avem condiția evidentă de contact cu emisfera:

$$(x - X)^2 + y^2 = R^2,$$

care derivată în raport cu timpul dă o condiție pentru viteze:

$$(x - X)(v_x - V) + yv_y = 0 \tag{6}$$

sau $R \sin \theta(v_x - V) + R \cos \theta \cdot v_y = 0, \quad \operatorname{tg} \theta(v_x - V) + v_y = 0.$ (7)

Din (4) și (7) obținem:

$$v_x = -\frac{M}{m} V, \quad v_y = (1 + M/m) \operatorname{tg} \theta \cdot V, \tag{8}$$

$$v^2 = V^2[M^2/m^2 + (1 + M/m)^2 \operatorname{tg}^2 \theta] \tag{9}$$

și atunci (5) se poate scrie astfel:

$$mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} MV^2[1 + M/m + (2 + M/m + m/M) \operatorname{tg}^2 \theta]. \tag{10}$$

Derivînd (6) încă o dată, obținem o condiție pentru accelerații:

$$(v_x - V)^2 + (x - X)(a_x - A) + v_y^2 + ya_y = 0. \tag{11}$$

a) Să considerăm acum momentul desprinderii. La limita, în acest moment, putem încă folosi condiția (5) și consecințele ei. Pe de altă parte, în acest moment reacțiunea normală N se anulează și accelerațiile au valorile (din (2)):

$$a_x = 0, \qquad a_y = -g. \tag{12}$$

Introducînd aceasta în (11), precum și valorile (8), găsim:

$$V_0^2(1 + M/m)^2 = Rg \cos^3 \theta_0. \tag{13}$$

Introducînd pe V_0 de aici în (10), obținem

$$\frac{1}{1 + M/m} \cos^3 \theta_0 - 3 \cos \theta_0 + 2 = 0. \tag{14}$$

Scanned with OKEN Scanner

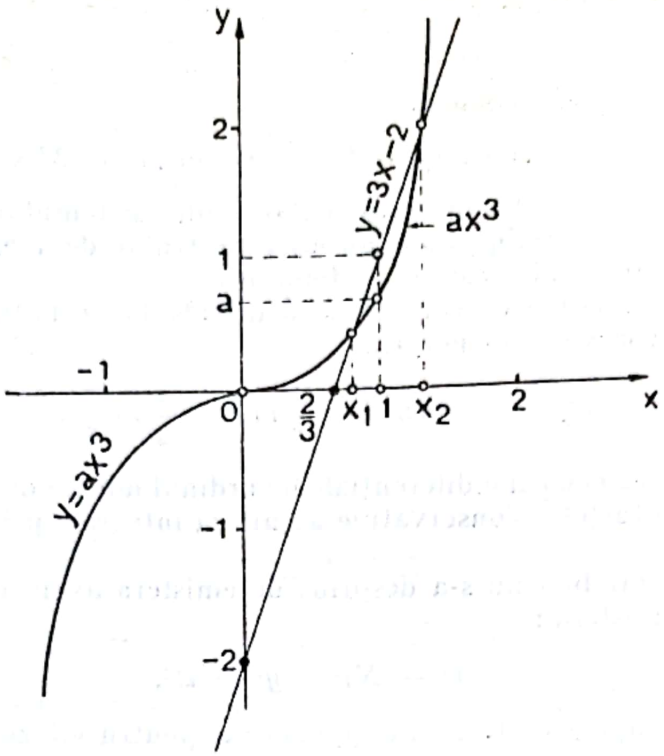


Fig. I.45, R.

Această ecuație ne permite în principiu să găsim unghiul θ_0 al punctului de pe emisferă în care se desprinde bila.

Să notăm: $\cos\theta_0 = x$, $0 < \dfrac{1}{1+M/m} = a < 1$, (15)

atunci ecuația (14) se scrie: $ax^3 - 3x + 2 = 0$. (16)

Conform unei teoreme a lui Descartes, ecuația avînd două variații de de semn, trebuie să aibă o rădăcină negativă și două rădăcini pozitive sau nici una. Grafic se vede ușor că ecuația are două rădăcini pozitive: $x_1 \in (2/3, 1)$ și $x_2 > 1$ (fig. I.45, *R*).

Prin urmare există o soluție corespunzătoare problemei:

$$\cos\theta_0 \in (2/3,\ 1). \tag{17}$$

b) Cunoscînd pe $\cos\theta_0$, cunoaștem vitezele în momentul desprinderii:

$$V_0^2 = a^2Rg\cos^3\theta = aRg(3\cos\theta_0 - 2),\quad v_0^2 = Rg[(3a-5)\cos\theta_0 + 4]. \tag{18}$$

c) Cantitatea de gheață topită este:

$$m_g = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{2}mv_0^2. \tag{19}$$

unde λ este căldura latentă de topire a gheții.

Observație. Dacă $M \gg m$ sau $a \ll 1$, adică emisfera de masă M este practic fixă, ecuația (14) se reduce la următoarea ($a \to 0$):

$$3\cos\theta_0 - 2 = 0, \qquad \cos\theta_0 = 2/3, \tag{20}$$

adică se obține rezultatul de la o problemă cunoscută.

Scanned with OKEN Scanner

6.2. *a)* Punctele 1, 2 fiind coliniare cu originea, avem

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2} \quad \text{sau} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2}. \tag{1}$$

Exact la fel, ținînd seama și de condiția dată $V_2 = V_4$:

$$\frac{p_4}{V_4} = \frac{p_3}{V_3} \quad \text{sau} \quad \frac{p_4}{p_3} = \frac{V_2}{V_3}. \tag{2}$$

Pe de altă parte, din legea Boyle-Mariotte :

$$p_1V_1 = p_4V_4 \quad \text{sau} \quad \frac{p_1}{p_4} = \frac{V_2}{V_1}; \tag{3}$$

$$p_2V_2 = p_3V_3 \quad \text{sau} \quad \frac{p_2}{p_3} = \frac{V_3}{V_2}. \tag{4}$$

Înmulțind membru cu membru ecuațiile (1) cu (3) și apoi (2) cu (4), obținem :

$$p_1^2 = p_2p_4 \quad \text{și} \quad p_3^2 = p_2p_4, \text{ deci } p_1 = p_3 = \sqrt{p_2p_4}. \tag{5}$$

b) Înmulțind membru cu membru ecuațiile (1) cu (4), obținem :

$$1 = \frac{V_1V_3}{V_2^2}, \text{ de unde } V_3 = \frac{V_2^2}{V_1} = 4{,}00 \text{ l}. \tag{6}$$

c) Ecuația transformărilor 1—2 și 3—4 este de tip $p = \text{const} \cdot V$. Atunci din ecuația de stare rezultă :

$$pV = \frac{m}{\mu}RT, \quad \text{const} \cdot V^2 = \frac{m}{\mu}RT, \quad V \sim \sqrt{T} \text{ — parabolă}, \tag{7}$$

respectiv,

$$\frac{p^2}{\text{const}} = \frac{m}{\mu}RT, \quad p \sim \sqrt{T} \text{ — parabolă}. \tag{8}$$

Acum ciclurile se transcriu ușor în diagramele cerute (fig. I.46, *R*).

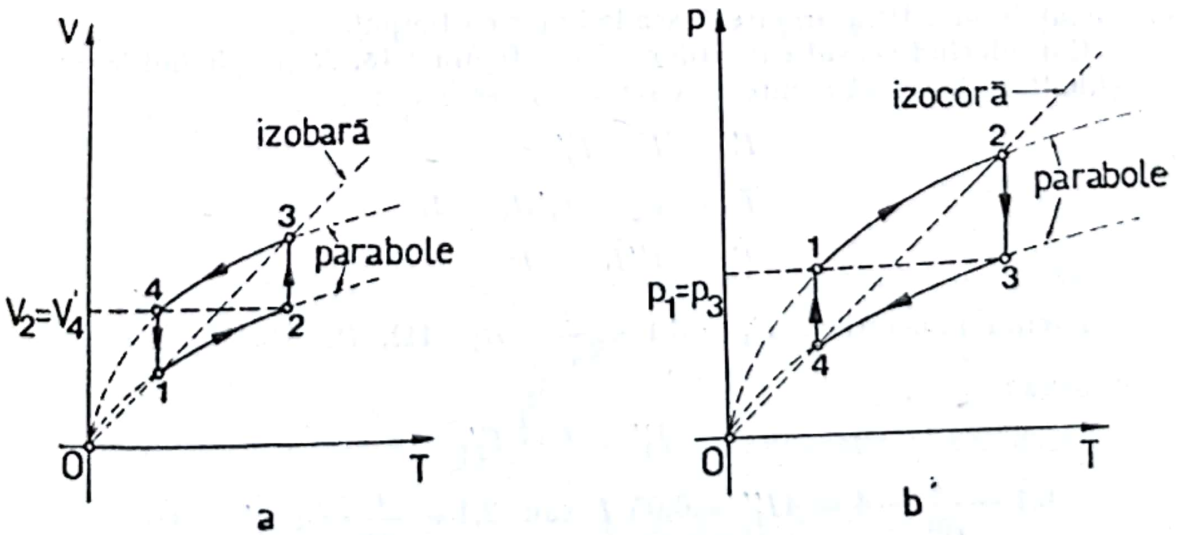


Fig. I.46, R.

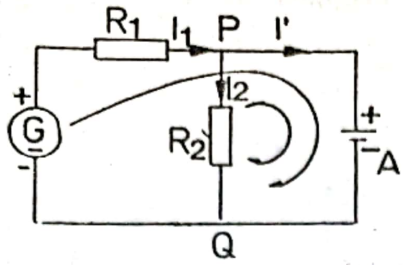


Fig. I.47, R.

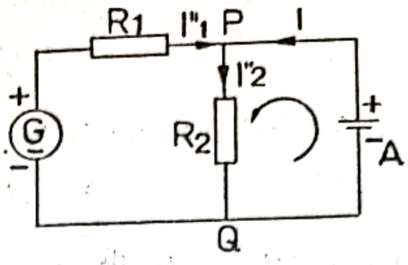


Fig. I.48, R.

6.3. *a)* Fie I_1, I_2 și I' curenții din ramurile circuitului (fig. I.47, *R*). Considerînd, inițial, tensiunea electromotoare a dinamului: $E_1 = 6{,}1$ V și aplicînd legile lui Kirchhoff în cazul circuitului dat, vom putea scrie:

$$I_1 = I_2 + I', \tag{1}$$

$$E_1 - E_2 = I_1 R_1 + I' r \tag{2}$$

$$-E_2 = I' r - I_2 R_2. \tag{3}$$

Rezolvînd sistemul de 3 ecuații cu 3 necunoscute se obțin următoarele valori pentru curenți:

$$I_1 \approx 0{,}525 \text{ A}, \quad I_2 \approx 0{,}5 \text{ A} \text{ și } I' \approx 0{,}024 \text{ A}.$$

În situația în care tensiunea electromotoare a dinamului este $E_1' = 5{,}5$ V, aplicînd aceluiași circuit legile lui Kirchhoff se vor obține pentru curenții din ramificații următoarele valori:

$$I_1' \approx 0{,}376 \text{ A}, \quad I_2' \approx 0{,}5 \text{ A} \text{ și } I'' \approx -0{,}122 \text{ A}.$$

Deci sensul curentului prin acumulator (I'') este invers celui pe care l-am presupus inițial; așadar în acest ultim caz acumulatorul funcționează ca generator, ambele aparate (dinam, acumulator) debitînd pe rezistorul cu rezistența R_2.

b) Începînd cu momentul $t_0 = 0$ cînd $E = E_1$, variația lui E în funcție de timp va fi dată de relația $E = 6{,}1 - \frac{0{,}6}{24} t$ sau $E = 6{,}1 - \frac{t}{40}$ unde t este exprimat în ore. Prin urmare E scade liniar cu timpul.

Considerînd sensul curenților cel din figura I.48, *R* și aplicînd legile lui Kirchhoff acelorași elemente de circuit vom scrie:

$$I_1'' + I = I_2'' \tag{1'}$$

$$E_1 - E_2 = I_1'' R_1 - Ir \tag{2'}$$

$$E_2 = I_2'' R_2 + Ir. \tag{3'}$$

Făcînd înlocuirile: $E_1 = 6{,}1 - \frac{t}{40}$, $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 8\,\Omega$ și $r = 0{,}05\,\Omega$, vom avea:

$$I_1'' + I = I_2''$$

$$6{,}1 - \frac{t}{40} - 4 = 4I_1'' - 0{,}05\,I \text{ sau } 2{,}1 - \frac{t}{40} = 4\,I_1'' - 0{,}05\,I$$

$$4 = 8I_2'' + 0{,}05I$$

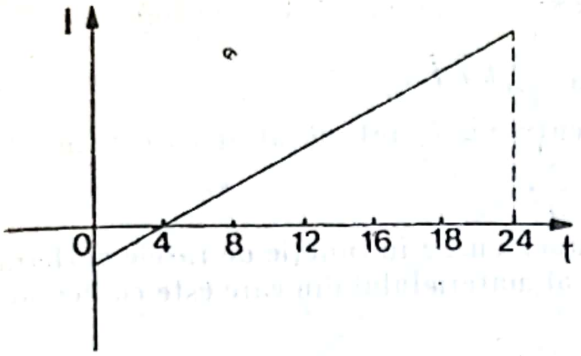


Fig. I.49, R.

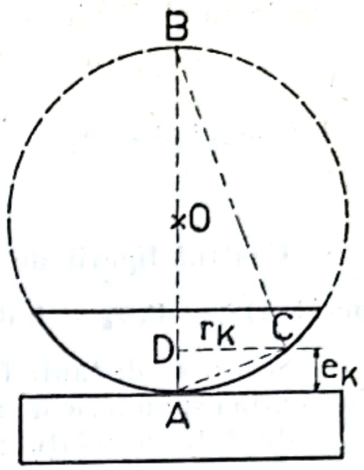


Fig. I.50, R.

de unde se obține pentru intensitatea curentului prin acumulator expresia :

$$I = \frac{t-4}{163}.$$

În figura I.49, R se dă graficul dependenței lui I în funcție de timp.

Discuții. Dacă $0 \leqslant t < 4$ h, $I < 0$, deci acumulatorul funcționează ca receptor. Dacă $4 < t \leqslant 24$ h, $I > 0$, acumulatorul funcționează ca generator. Dacă $t = 4$ h, $I = 0$, prin acumulator nu circulă curent. De remarcat că și în acest caz intensitatea curentului prin rezistorul cu rezistența R_2 este tot 0,5 A. (Într-adevăr, în ecuația (3') punînd $I = 0$, rezultă $I_2'' = 0{,}5$ A). Cu alte cuvinte indiferent de variația tensiunii electromotoare a dinamului curentul în rezistorul cu rezistența R_2 se menține constant. Se spune, în asemenea situații, că acumulatorul funcționează ca o *baterie tampon*.

6.4. *a)* Dispozitivul din problemă este acela prin care se obțin inelele lui Newton.

Este vorba de o pană optică de aer de grosime variabilă, simetrică în jurul lui AB, axa optică principală a lentilei (fig. I.50, R). Interferența se poate produce la suprafața de separație lentilă-aer, în punctele de genul lui C.

Condiția pentru obținerea franjelor de maxim (inele luminoase) este dată de expresia : $\Delta = 2\,ne\cos r + \frac{\lambda}{2} = k\lambda$, cunoscută de la interferența prin lame subțiri. Ținînd seama de faptul că pentru acest strat (aer) $n = 1$, și că incidența este normală, deci $i = 0$, $r = 0$, urmează că :

$$\Delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = k\lambda. \tag{1}$$

Calculul razei inelelor (franjelor inelare) ne conduce la rezultatul :

$$r_k^2 \simeq 2Re_k \tag{2}$$

r_k fiind raza inelului de ordin k.

Introducînd pe (2) în (1) obținem raza unui inel luminos de ordin k, adică :

$$r_{k_{max}} = \sqrt{\frac{R\lambda(2k-1)}{2}}. \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a obține inele întunecate (franje inelare întunecate) condiția este ca : $\Delta = 2e + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$.

Introducînd pe $r_k^2 = 2Re_k$ în expresia de mai sus se obține :

$$r_{k_{min}} = \sqrt{k\lambda R}. \tag{4}$$

b) Centrul figurii de interferență va fi întunecat deoarece în centru (punctul A) $e_k = 0$, $r_k = 0$ deci $\Delta = \frac{\lambda}{2}$.

c) Se știe că distanța focală a unei lentile în funcție de razele curbură ale fețelor lentilei și indicele de refracție al materialului din care este confecționată lentila este dată de relația :

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{5}$$

Cum în cazul dat $R_2 = \infty$, urmează că : $f = \frac{R_1}{n-1}$. (6)

Explicitînd pe R_1 din relația (3) și înlocuind în (6), obținem :

$$f = \frac{2r_{k_{max}}^2}{(2k-1)(n-1)\lambda}. \tag{7}$$

Înlocuind datele numerice în (7) vom avea

$$f = \frac{2(1{,}1\cdot 10^{-3})^2}{5\cdot 0{,}5\cdot 5\,893\cdot 10^{-10}} \approx 1{,}5 \text{ m}.$$

d) Cînd lama de grosime variabilă era de aer, expresia diferenței de drum era : $\Delta = 2ne_k + \frac{\lambda}{2}$. Dacă între lentilă și lamă se introduce sulfură de carbon, deoarece indicele de refracție al sulfurii de carbon este mai mare decît al sticlei, la reflexia pe lama de sticlă nu mai apare o diferență de drum suplimentară de $\frac{\lambda}{2}$. Prin urmare expresia diferenței de drum va fi : $\Delta = 2n'ek$ unde n' este indicele de refracție al sulfurii de carbon. Aceasta înseamnă că figura de interferență observată va fi complementară primei figuri : în locul unui inel luminos va apare unul întunecat și invers.

6.5. Ciocnirea fiind perfect elastică, avem cele două legi de conservare :

$$Mv = mv_1 + Mv_2,$$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2. \tag{1}$$

Izolînd termenii care-l conțin pe m într-o parte și pe cei care-l conțin pe M în cealaltă parte, și împărțind ecuațiile obținute membru la membru, găsim

$$v_1 = v_2 + v. \tag{2}$$

Această ecuație nu este decît condiția $k = 1$ (coeficientul de restituție pentru ciocnirea perfect elastică este egal cu unu) :

$$k = -\frac{v_2 - v_1}{v} = 1, \quad \text{de unde } v_1 - v_2 = v.$$

Scanned with OKEN Scanner

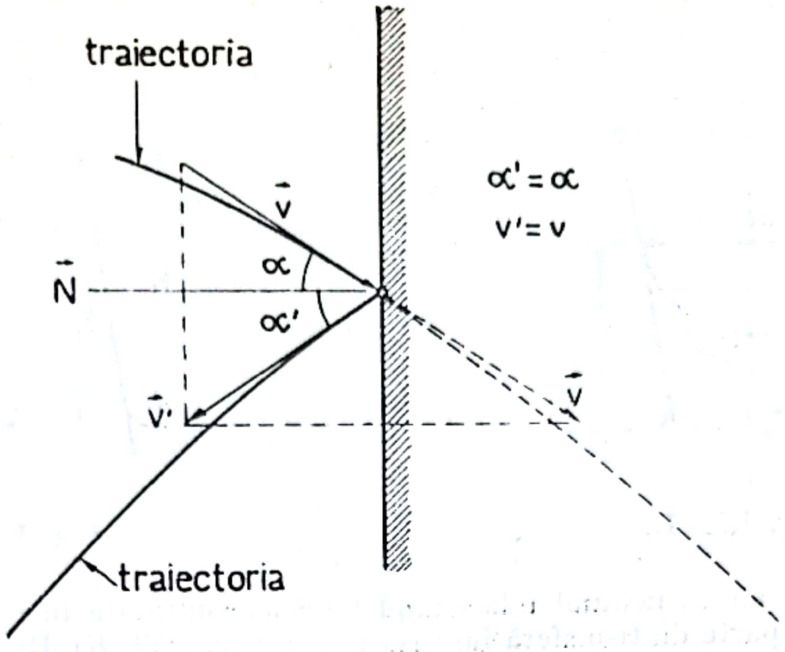


Fig. I.51, R.

Acum prima ecuație dă : $v_1 = v\dfrac{2M}{m+M}$. (3)

Ciocnirile bilei cu pereții celor două blocuri fiind perfect elastice, viteza după ciocnire $\vec{v}'$ este egală în modul cu viteza înainte de ciocnire $\vec{v}$, și unghiul de reflexie α' este egal cu unghiul de incidență α ($\vec{v}$ și $\vec{v}'$ sînt în același plan cu normala la perete, fig. I.51, *R*).

Dacă oglindim, față de perete, mișcarea după ciocnire, ea ar prelungi mișcarea de dinainte de ciocnire, ca și cum n-ar exista peretele (după o parabolă). Problema echivalează cu o aruncare orizontală cu viteza v_1, urmînd să aflăm de cîte ori se cuprinde distanța dintre pereți d în bătaia căderii.

Timpul de cădere este

$$t = \sqrt{2h/g}, \tag{4}$$

deci bătaia orizontală

$$B = v_1 t = v_1\sqrt{2h/g}. \tag{5}$$

Numărul de ciocniri :

$$N = \frac{B}{d} = \frac{v_1}{d}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2M}{m+M}\,\frac{v}{d}\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{6}$$

(Se va lua, desigur, partea întreagă a acestui număr).

Pe porțiunea orizontală s viteza $\vec{v}_1$ a bilei nu se schimbă, dacă neglijăm frecarea cu aerul și frecarea la rostogolire, adică considerăm bila dură și planul orizontal dur.

Scanned with OKEN Scanner

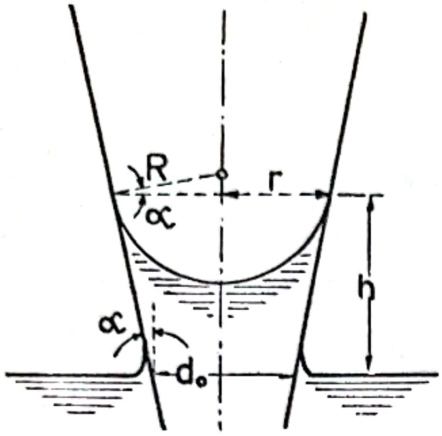


Fig. I.52, R.

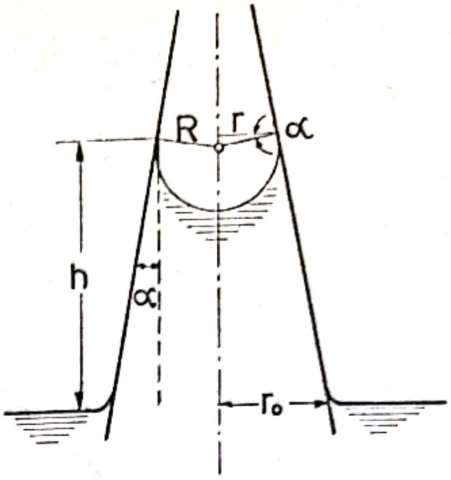


Fig. I.53, R.

6.6. Deoarece lichidul udă complet sticla, suprafața liberă a lichidului reprezintă o parte dintr-o sferă înscrisă în con (fig. I.52, *R*). Raza sferei este :

$$R = \frac{r}{\cos \alpha}, \tag{1}$$

unde r este raza capilarului la înălțimea la care se ridică lichidul. Știm că la traversarea unei pelicule superficiale sferice de rază R, avem un salt de presiune dat de formula lui Laplace :

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \tag{2}$$

Această diferență de presiune este echilibrată de presiunea hidrostatică a coloanei de lichid

$$\frac{2\sigma}{R} = \rho g h. \tag{3}$$

Dar

$$r = r_0 + h \operatorname{tg} \alpha, \; r_0 = d_0/2, \tag{4}$$

astfel încît,

$$\frac{2\sigma \cos \alpha}{r_0 + h \operatorname{tg} \alpha} = \rho g h, \; h^2 \rho g \operatorname{tg} \alpha + h \rho g r_0 - 2\sigma \cos \alpha = 0. \tag{5}$$

Pentru $\alpha = 0$ obținem rezultatul cunoscut la tuburile capilare cilindrice :

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r_0}. \tag{6}$$

Ecuația (5) are o singură rădăcină pozitivă :

$$h = \frac{-r_0 + \sqrt{r_0^2 + 8\sigma \sin \alpha / \rho g}}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{-d_0 + \sqrt{d_0^2 + 32\sigma \sin \alpha / \rho g}}{4 \operatorname{tg} \alpha}. \tag{7}$$

În cazul capilarului conic introdus invers (fig. I.53, *R*), avem

$$r = r_0 - h \operatorname{tg} \alpha, \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît

$$\frac{2\sigma \cos \alpha}{r_0 - h \operatorname{tg} \alpha} = \rho g h \tag{9}$$

și ecuația (5) devine

$$h^2 \rho g \operatorname{tg} \alpha - h \rho g r_0 + 2\sigma \cos \alpha = 0, \tag{10}$$

$$h = \frac{r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - 8\sigma \sin \alpha / \rho g}}{2 \operatorname{tg} \alpha}. \tag{11}$$

Dacă

$$\rho g r_0^2 > 8\sigma \sin \alpha, \tag{12}$$

vom avea două soluții pozitive. Să studiem stabilitatea acestor soluții. Pentru aceasta să studiem egalitatea celor două presiuni din ecuația de echilibru (9).

Presiunea hidrostatică dată de coloana de lichid h:

$$p_{hs} = \rho g h \tag{13}$$

și presiunea datorată forțelor de tensiune superficială:

$$p_{ts} = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r_0 - h \operatorname{tg} \alpha}. \tag{14}$$

Să reprezentăm aceste două presiuni în aceeași diagramă în funcție de h (fig. I.54, R). Ecuația (13) se reprezintă printr-o dreaptă care trece prin origine, iar (14) dă o ramură de iperbolă echilaterală cu asimptota verticală $h = r_0/\operatorname{tg} \alpha$. Cele două soluții corespund celor două puncte de intersecție, cînd presiunile se egalează (condiția de echilibru).

Dacă acum înălțimea coloanei h crește puțin peste h_1, presiunea dată de tensiunea superficială p_{ts} devine mai mică decît presiunea hidrostatică p_{hs} și deci coloana de lichid va coborî înapoi. Invers, dacă h scade sub h_1, $p_{ts} > p_{hs}$ și forțele capilare ridică coloana de lichid înapoi. Prin urmare, poziția de echilibru

$$h_1 = \frac{r_0 - \sqrt{r_0^2 - 8\sigma \sin \alpha / \rho g}}{2 \operatorname{tg} \alpha} \tag{15}$$

este stabilă.

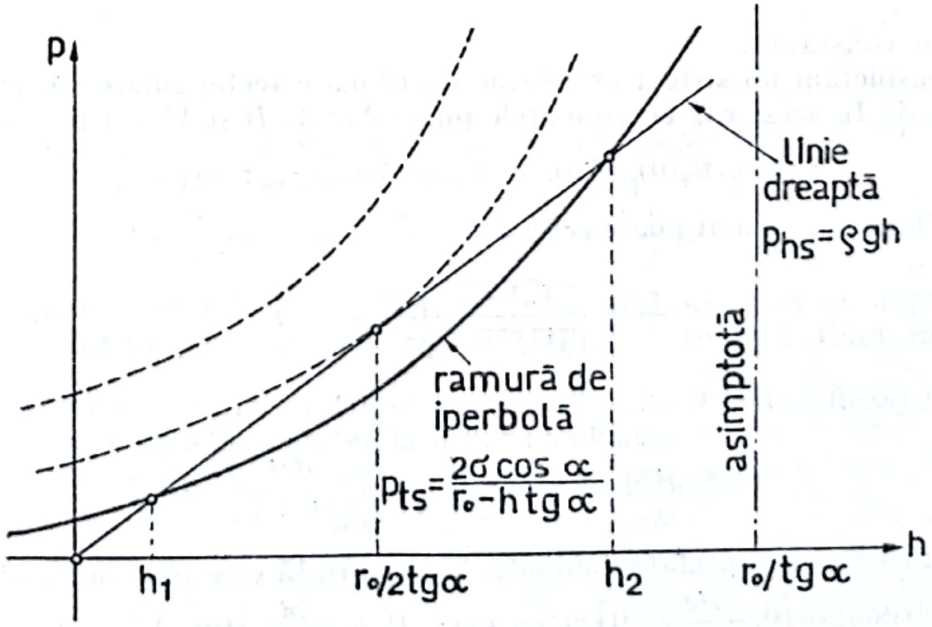


Fig. I.54, R.

Scanned with OKEN Scanner

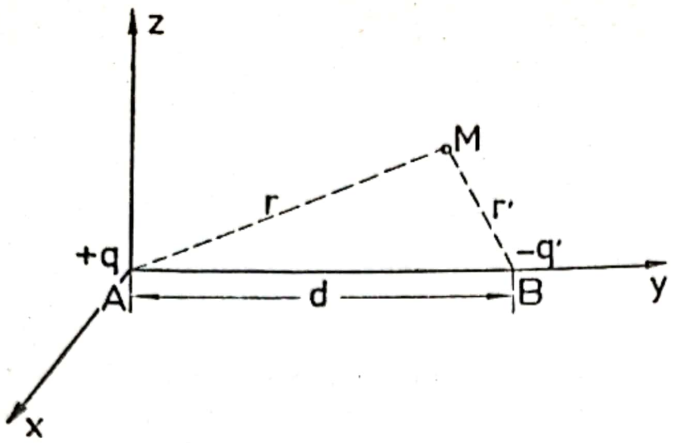


Fig. I.55, R.

Soluția h_2 este instabilă. În adevăr, dacă $h < h_2$, $p_{ts} < p_{hs}$ și lichidul continuă să coboare pînă la nivelul stabil h_1. Dacă $h > h_2$, $p_{ts} > p_{hs}$ și ridică lichidul în sus pînă la marginea tubului capilar.

În cazul excepțional: $$\rho g r_0^2 = 8\sigma \sin \alpha, \tag{16}$$
avem o singură soluție, în fond instabilă: la o scădere a lui h, lichidul urcă înapoi, dar la o creștere a lui h, lichidul urcă pînă la vîrful capilarului.

În cazul $$\rho g r_0^2 < 8\sigma \sin \alpha \tag{17}$$
nu avem soluții stabile, forțele capilare vor ridica lichidul pînă la vîrful capilarului.

6.7. *a)* Fie M un punct oarecare la distanța r de q și respectiv r' de $-q$ (fig. I.55, *R*). Să calculăm potențialul electric în acest punct:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} - \frac{q'}{4\pi\varepsilon r'}. \tag{1}$$

Impunem relației (1) condiția ca potențialul în M să fie nul. Vom avea:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon r} = \frac{q'}{4\pi\varepsilon r'} \quad \text{sau} \quad \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} = \frac{MA}{MB} = \lambda \tag{2}$$

λ fiind o constantă.

Considerăm un sistem de axe de coordonate rectangulare $(Axyz)$ cu originea în A. În acest caz coordonatele punctelor A, B și M vor fi:

$$A(0,\ 0,\ 0),\ B(0,\ d,\ 0) \text{ și } M(x,\ y,\ z).$$

Relația (2) se mai poate scrie:

$$\frac{r}{r'} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + (y-d)^2 + z^2}} = \lambda \tag{3}$$

de unde rezultă că:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\frac{\lambda^2 d}{\lambda^2 - 1} y + \frac{\lambda^2 d^2}{\lambda^2 - 1} = 0. \tag{4}$$

Prin urmare suprafața echipotențială căutată este o sferă cu centrul în O de coordonate $\left(0, \frac{\lambda^2 d}{\lambda^2 - 1}, 0\right)$ și cu raza $R = \frac{\lambda d}{\lambda^2 - 1}$ (fig. I.56, *R*).

Scanned with OKEN Scanner

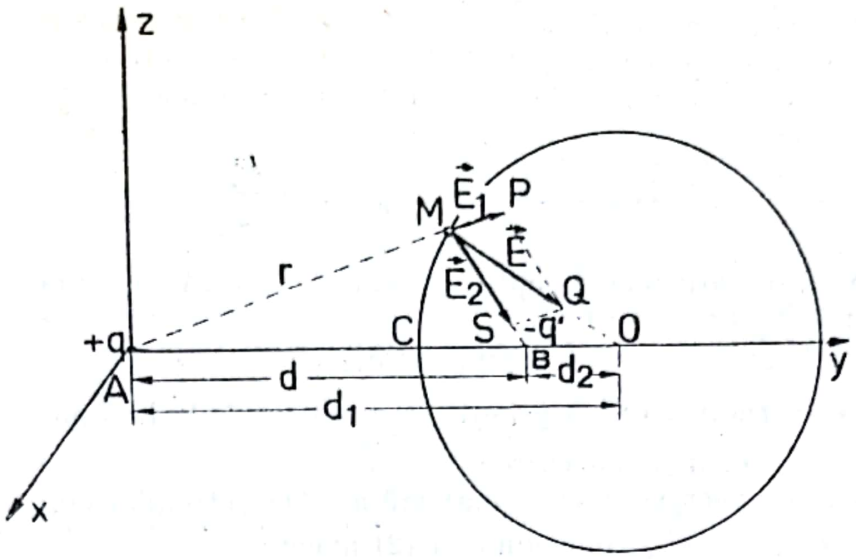


Fig. I.56, R.

Centrul sferei se găsește pe dreapta AB la distanța d_1 de punctul A și d_2 de punctul B, unde d_1 și d_2 pot fi exprimate astfel:

$$d_1 = \frac{\lambda^2 d}{\lambda^2 - 1} = \lambda R = R\,\frac{q}{q'} \tag{5}$$

și $d_2 = \dfrac{\lambda^2 d}{\lambda^2 - 1} - d = \dfrac{d}{\lambda^2 - 1}$ sau $d_2 = \dfrac{R}{\lambda} = R\dfrac{q'}{q}$. (6)

În ipoteza considerată în problemă: $|q| > |q'|$, punctul A este în exteriorul sferei, iar punctul B este în interiorul acesteia.

Din relațiile (5) și (6) rezultă că raza sferei de potențial zero este: $R = \sqrt{d_1 d_2}$, iar centrul sferei se găsește într-un punct O, situat pe linia ce unește sarcinile q și q', astfel încît:

$$\frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{q}{q'}\right)^2.$$

b) Cîmpul electric în M este rezultanta cîmpurilor create de q și q' în M, adică $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ (fig. I.56, *R*) unde:

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \text{ și } \quad E_2 = \frac{q'}{4\pi\varepsilon r'^2}.$$

Pentru a calcula pe E vom proceda în felul următor:

Calculăm raportul dintre componentele cîmpului:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{q}{q'} \cdot \frac{r'^2}{r^2} \text{ cum } \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} \text{ urmează că } \frac{E_1}{E_2} = \frac{r'}{r} = \frac{MB}{MA}. \tag{7}$$

Relația (7) ne arată că segmentele de dreaptă prin care am reprezentat pe E_1 și E_2 sînt proporționale cu laturile MB, respectiv MA. Cum unghiurile $\widehat{AMB}$ și $\widehat{MPQ}$ sînt egale, înseamnă că triunghiurile AMB și MPQ sînt asemenea. Scriem proporționalitatea laturilor omoloage:

$$\frac{MQ}{AB} = \frac{PQ}{AM} \text{ sau } \frac{MQ}{PQ} = \frac{AB}{AM}.$$

Cum $MQ = E$, $PQ = E_1$, $AB = d$ și $AM = r$, rezultă că $\dfrac{E}{E_1} = \dfrac{d}{r}$.

Deci $$E = E_1 \frac{d}{r} \text{ sau } \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^3} d.$$

Scanned with OKEN Scanner

6.8. A opri fotoelectronii să ajungă pe anod revine la a spune că energia lor cinetică trebuie să scadă de la valoarea maximă (catod) la zero (anod). Acest lucru se poate realiza aplicînd o tensiune de frînare (U_0) între anod și catod astfel ca :

$$eU_0 = \Delta E_k = E_{k_{max}} = \frac{mV_{max}^2}{2}. \qquad (1)$$

Legea conservării energiei aplicată emisiei electronilor prin efect fotoelectric ne dă :

$$h\nu = E_0 + E_{kmax} \qquad (2)$$

unde : $h\nu$ este energia totală primită de electron de la lumină ;

E_0 — energia de ieșire ;

E_{kmax} — energia cinetică maximă a fotoelectronilor emiși.

Cum : $E_{kmax} = eU_0$, înlocuind în (2) avem :

$$h\nu = E_0 + eU_0 \qquad (2')$$

Dar $\lambda = \frac{c}{\nu}$, deci $h\frac{c}{\lambda} = E_0 + eU_0$ prin urmare $\lambda = \frac{hc}{E_0 + eU_0}$.

Înlocuind cu datele numerice, obținem :

$$\lambda = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{3{,}2 \cdot 10^{-1} + 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ 0{,}475} \cong 5 \cdot 10^{-7}\ \text{m}.$$

Cunoscînd pe λ vom putea afla imediat numărul de trăsături pe unitatea de lungime a rețelei din expresia : $\frac{1}{N}\sin\theta = k\lambda$, de unde $N = \frac{\sin\theta}{k\lambda}$.

Făcînd înlocuirile, vom avea : $N = \frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = \frac{1}{20} \cdot 10^7$ trăs/mm = 500 trăs/mm.

II

Olimpiadele internaționale de fizică

Prima Olimpiadă internațională de fizică 1967, Varșovia, R. P. Polonă

Problema 1. Conservarea impulsului sistemului (glonț + bilă) în procesul de ciocnire dintre glonț și bilă se scrie astfel :

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v} + M\vec{v}_1, \qquad (1)$$

(impulsul sistemului înainte de ciocnire = impulsul sistemului imediat după ciocnire),

unde $\vec{v}_0$ este viteza glonțului înainte de ciocnire, $\vec{v}$ viteza glonțului imediat după ciocnire, $\vec{v}_1$ viteza bilei imediat după ciocnire. Proiectînd ecuația (1) de conservare a impulsului pe direcția orizontală (Ox), obținem

$$mv_0 = mv + Mv_1. \tag{2}$$

Pe direcția verticală (Oy), atît glonțul, cît și bila, cad, după ciocnire, vertical în jos, uniform accelerat, fără viteză inițială, atingînd solul în același timp :

$$h = \frac{1}{2} gt^2, \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{3}$$

Pe direcția orizontală (Ox), atît glonțul, cît și bila, se mișcă după ciocnire uniform :

$$v_x = v = \text{const.}, \quad v_{1x} = v_1 = \text{const.} \tag{4}$$

Cunoscînd distanța orizontală s_1 la care cade bila, putem scrie

$$s_1 = v_1 t, \text{ (5) de unde } v_1 = \frac{s_1}{t} = s_1 \sqrt{\frac{g}{2h}} = 20{,}0 \text{ m} \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m/s}^2}{2 \cdot 5{,}00 \text{ m}}} = 19{,}8 \text{ m/s}. \tag{6}$$

Din (2) rezultă viteza v :

$$v = v_0 - \frac{M}{m} s_1 \sqrt{\frac{g}{2h}} = 500 \text{ m/s} - \frac{200}{10{,}0} 20{,}0 \text{ m} \sqrt{\frac{9{,}8 \text{ m/s}^2}{2 \cdot 5{,}00 \text{ m}}} = 104 \text{ m/s} \tag{7}$$

și deci distanța cerută s :

$$s = vt = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{M}{m} s_1, \; s = 500 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}00 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} - \frac{200}{10{,}0} 20{,}0 \text{ m} = 105 \text{ m}. \tag{8}$$

Energia cinetică a glonțului înainte de ciocnire

$$E_0 = \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 10{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 500^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 1\,250 \text{ J} \tag{9}$$

se transformă în procesul de găurire a bilei parțial în căldură și parțial (restul) în energia cinetică a glonțului și bilei imediat după ciocnire :

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = Q + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Mv_1^2, \tag{10}$$

$$Q = \frac{1}{2} mv_0^2 - \left[\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} Mv_1^2\right] = 1\,250 \text{ J} -$$

$$- \left[\frac{1}{2} 10{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 104^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 + \frac{1}{2} \; 0{,}200 \text{ kg} \cdot 19{,}8^2 \text{ m}^2/\text{s}^2\right] = 1\,157 \text{ J}. \tag{11}$$

Fracțiunea cerută este raportul :

$$f = \frac{Q}{E_0} = \frac{1\,157}{1\,250} = 92{,}5\%, \tag{12}$$

adică aproape întreaga energie cinetică a glonțului se transformă în căldură (ciocnire aproape „plastică").

Scanned with OKEN Scanner

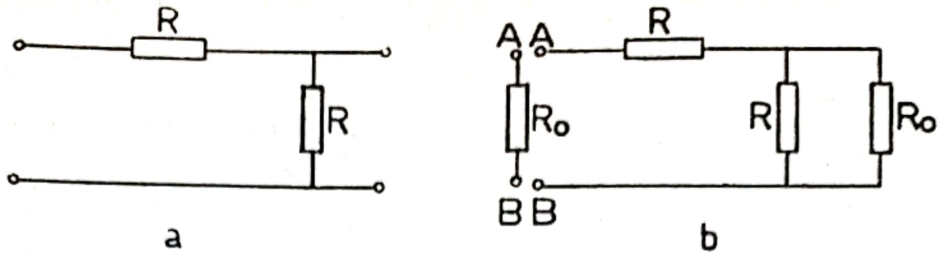


Fig. II.1, R.

Problema 2. Se constată că circuitul infinit prezintă „verigi" de tipul celei prezentate în figura II.1, *a*, *R*.

Fie R_0 rezistența echivalentă întregului circuit. Circuitul fiind infinit, rezistența sa nu se modifică dacă adăugăm încă o verigă (fig. II, 1, *b*, *R*).

Prin urmare, vom putea scrie :

$$R_0 = R + \frac{RR_0}{R + R_0},$$

de unde rezultă o ecuație de gradul doi în R_0 :

$$R_0 - RR_0 - R^2 = 0.$$

Prin rezolvarea acestei ecuații obținem :

$$R = \frac{R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{R}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Se poate constata imediat că soluția acceptabilă este :

$$R_0 = \frac{R}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Problema 3. Prin încălzire sferele se dilată. Centrul de greutate al sferei așezate va urca în timpul încălzirii, în timp ce centrul de greutate al sferei suspendate va coborî în timpul încălzirii (fig. II.2, *R*).

În primul caz trebuie efectuat lucru mecanic suplimentar împotriva forței de greutate (crește energia potențială a sferei), în timp ce în al doilea caz energia potențială scade. Rezultă că la aceeași cantitate de căldură absorbită, temperatura finală a primei sfere va fi mai mică decît cea a celei de a doua sfere.

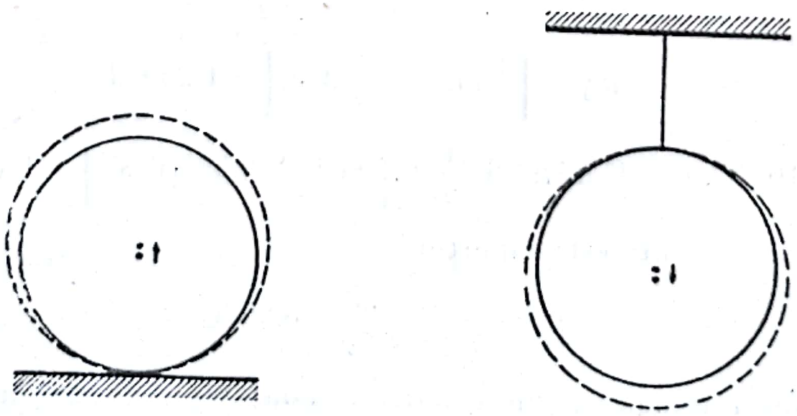


Fig. II.2, R.

Scanned with OKEN Scanner

Este de aşteptat ca efectul să fie foarte mic (deoarece dilatarea termică este mică).

Să facem o evaluare numerică.

Fie R raza sferei şi α coeficientul de dilatare liniară. Orice dimensiune liniară a unui corp (izotrop) creşte prin dilatare termică în acelaşi raport:

$$R = R_0(1 + \alpha\theta), \qquad \Delta R = R_0\alpha\Delta\theta. \tag{1}$$

Lucrul mecanic efectuat împotriva forţei de greutate sau creşterea de energie potenţială este

$$W = mg\cdot\Delta R = mgR_0\alpha\Delta\theta. \tag{2}$$

Creşterea de temperatură se poate evalua din căldura absorbită:

$$Q = mc\Delta\theta, \qquad (c \text{ — căldura specifică}). \tag{3}$$

Prin urmare,

$$W = mgR_0\alpha\frac{Q}{mc} = \frac{g}{c}R_0\alpha Q. \tag{4}$$

În cazul primei sfere acest lucru mecanic W este obţinut din transformarea unei părţi a căldurii absorbite Q, iar în cazul celei de a doua sfere, el se transformă în căldură suplimentară, care se adaugă la căldura absorbită Q. Prin urmare, în ambele cazuri avem o variaţie a temperaturii:

$$W = mc\delta\theta, \quad \delta\theta = \frac{W}{mc} = \frac{g\alpha}{mc^2}R_0Q. \tag{5}$$

Mărimea efectului este caracterizată de raportul

$$\frac{\delta\theta}{\Delta\theta} = \frac{W}{Q} = \frac{g}{c}R_0\alpha. \tag{6}$$

Pentru o sferă de rază $R = 10$ cm din cupru ($c = 395$ J/kg·K, $\alpha = 17\cdot10^{-6}$ K^{-1}), rezultă

$$\frac{\delta\theta}{\Delta\theta} = \frac{g}{c}R_0 = \frac{9{,}8 \text{ m/s}^2}{395 \text{ J/kg·K}}0{,}10 \text{ m } 17\cdot10^{-6} \text{ K}^{-1} \approx 4\cdot10^{-8}, \tag{7}$$

deci efectul este într-adevăr foarte mic: 4 milionimi % (ceea ce justifică aposteriori aproximaţiile din raţionament).

Problema 4. Volumul celor $m = 3{,}0$ g de apă (3 cm^3) este neglijabil faţă de volumul $V = 10{,}0$ l $= 10^4$ cm^3 al vasului, de aceea presiunea parţială a aerului la temperatura finală va fi (transformare izocoră):

$$p_a = H\frac{T}{T_0} = 1{,}00 \text{ atm}\,\frac{373}{273} = 1{,}36 \text{ atm} = 1{,}38\cdot10^5\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}. \tag{1}$$

La temperatura $\theta = 100°$C presiunea vaporilor saturanţi ai apei este binecunoscută $p_s = 1{,}00$ atm, deci masa vaporilor pe care îi poate cuprinde vasul este

$$m_v = \mu\frac{pV}{RT} = 18\,\frac{\text{kg}}{\text{kmol}}\,\frac{1{,}013\cdot10^5(\text{N/m}^2)10{,}0\cdot10^{-3}\text{m}^3}{8{,}3\cdot10^3(\text{J/kmol·K})\ 373\ \text{K}} = 5{,}9 \text{ g} > m = 3{,}0 \text{ g}. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, *toată* apa se va vaporiza și presiunea vaporilor nesaturanți ai apei va fi:

$$p_v = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{V} = \frac{3{,}0\cdot10^{-3}\ \text{kg}}{18\ \text{kg/kmol}}\,\frac{8{,}3\cdot10^{3}\ \text{(J/kmol·K)}\ 373\ \text{K}}{10{,}0\cdot10^{-3}\ \text{m}^3} =$$

$$= 5{,}16\cdot10^{4}\ \text{N/m}^2 = 0{,}51\ \text{atm} < p_s = 1{,}00\ \text{atm}. \qquad (3)$$

Sau altfel $p_v = \frac{m}{m_v}p_s = \frac{3{,}0}{5{,}9}\,1{,}00\ \text{atm} = 0{,}51\ \text{atm}$, deci în adevăr se vaporizează toată apa.

Presiunea totală va fi:

$$p = p_a + p_v = 1{,}87\ \text{atm} \approx 1{,}9\cdot10^{5}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\,. \qquad (4)$$

Lucrarea experimentală. Se cîntăresc mase egale de apă și petrol. Se pune apa în calorimetru și se încălzește cu încălzitorul electric. Se măsoară temperatura apei din minut în minut. Se reprezintă grafic creșterea temperaturii în funcție de timp. Punctele determinate experimental se așază pe o dreaptă ce trece prin punctul inițial.

Se repetă experiența cu o masă egală de petrol. Se reprezintă grafic temperatura petrolului în funcție de timp. Se obține o altă dreaptă ce trece prin același punct inițial.

Căldura Q_1 furnizată de încălzitor în unitatea de timp este practic constantă, egală cu puterea $P = U^2/R$ a încălzitorului. Această căldură este absorbită în esență de masa de apă, respectiv de petrol, și duce la o creștere corespunzătoare de temperatură ΔT_1, în unitatea de timp:

$$Q_1 = mc\Delta T_1. \qquad (1)$$

După cum am spus, Q_1 este practic constantă, de aceea și creșterea de temperatură în unitatea de timp ΔT_1 este practic constantă, altfel spus temperatura crește practic liniar cu timpul (fig. II.3, *R*) (la temperaturi mai mari creșterea devine din ce în ce mai mică).

Luînd două puncte pe dreaptă, de dorit cît mai depărtate între ele (pentru a mări precizia de măsură a pantei), putem calcula panta dreptei din

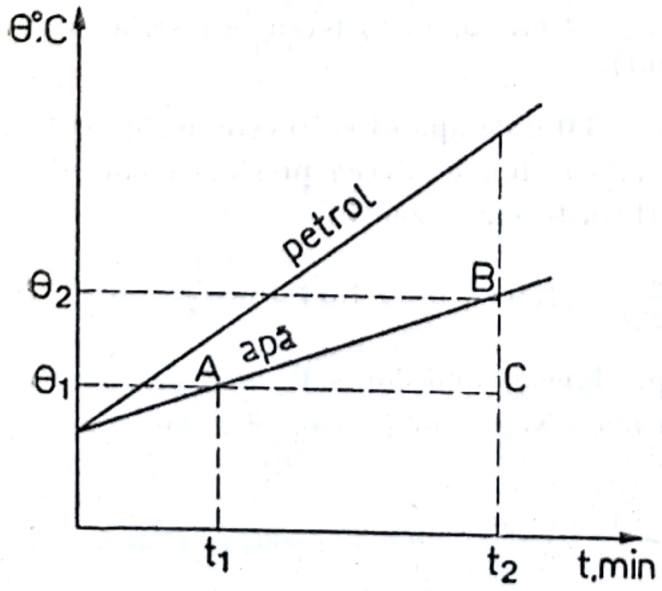


Fig. II.3, R.

Scanned with OKEN Scanner

raportul catetelor $CB : AC$, adică creşterea temperaturii $\Delta\theta = CB$, împărţită la intervalul de timp corespunzător $\Delta t = AC$, ceea ce dă ΔT_1 — creşterea temperaturii în unitatea de timp :

$$k = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \Delta T_1 = \frac{Q_1}{mc}. \qquad (2)$$

Prin urmare, pantele dreptelor sînt invers proporţionale cu capacitatea calorică a lichidului.

Masele celor două lichide fiind luate egale între ele, rezultă că raportul pantelor este egal cu raportul invers al căldurilor specifice :

$$\frac{k_{apă}}{k_{petrol}} = \frac{c_{petrol}}{c_{apă}}; \quad c_{petrol} = c_{apă}\frac{k_{apă}}{k_{petrol}}, \quad (c_{apă} = 4\,180\ \text{J/kg·K}). \qquad (3)$$

Evident, pot fi considerate şi alte metode, de exemplu, *metoda amestecurilor*.

A II-a
Olimpiadă internaţională de fizică
1968, Budapesta, R. P. Ungară

Problema 1. Problema poate fi rezolvată prin două metode.

Metoda energetică (legea conservării energiei). În cazul nostru energia potenţială a sistemului scade, transformîndu-se parţial în energia cinetică a corpurilor şi parţial în căldură prin lucrul mecanic al forţei de frecare.

Toate forţele fiind constante, acceleraţia sistemului este constantă şi sistemul se mişcă uniform accelerat. În timpul t se parcurge distanţa $s = at^2/2$ de-a lungul planului înclinat (fig. II.4, *R*), deci scăderea energiei potenţiale este

$$-\Delta E_p = (m_1 + m_2)gh = (m_1 + m_2)g\frac{1}{2}at^2 \sin\alpha. \qquad (1)$$

Energia cinetică de translaţie a celor două corpuri :

$$E_{c,\,tr} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)a^2t^2. \qquad (2)$$

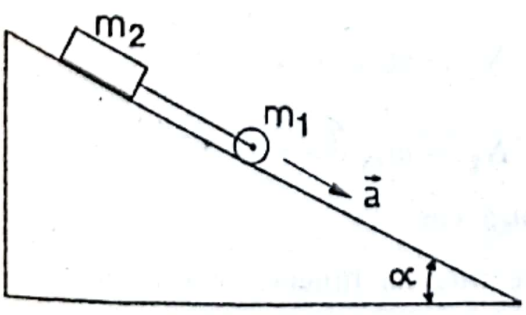


Fig. II.4, R.

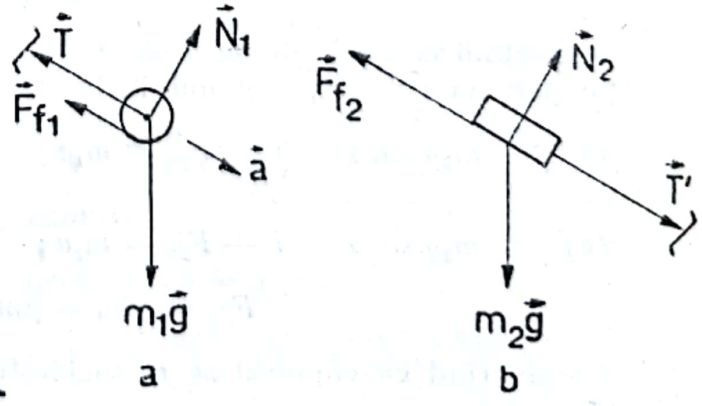


Fig. II.5, R.

Energia cinetică de rotație a cilindrului, considerînd că cilindrul nu lunecă (în acest caz $v = \omega R$):

$$E_{c,\,rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2} I \frac{a^2 t^2}{R^2}, \tag{3}$$

unde $$I = \frac{1}{2} m_1 R^2 = \frac{1}{8} m_1 d^2 = \frac{1}{8} 8{,}00\ \text{kg} \cdot 0{,}100^2\ \text{m}^2 = 1{,}00 \cdot 10^{-2}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 \tag{4}$$

este momentul de inerție al cilindrului.

Lucrul mecanic al forței de frecare (în valoare absolută):

$$Q = F_f \cdot s = \mu m_2 g \cos\alpha \cdot \frac{1}{2} a t^2. \tag{5}$$

Bilanțul energiilor este:

$$-\Delta E_p = E_{c,\,tr} + E_{c,\,rot} + Q, \tag{6}$$

de unde rezultă accelerația:

$$a = g \frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - \mu m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2 + I/R^2}, \tag{7}$$

$$a = 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{12\ \text{kg} \cdot \sin 30^\circ - 0{,}20 \cdot 4{,}90\ \text{kg} \cdot \cos 30^\circ}{12\ \text{kg} + 1{,}00 \cdot 10^{-2}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2 / 5{,}0^2 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 3{,}25\ \text{m/s}^2.$$

Metoda ecuațiilor mișcării (a forțelor). Considerînd separat cilindrul și cărămida, și toate forțele care acționează asupra lor (fig. II.5, *R*), scriem ecuația fundamentală $\vec{F} = m\vec{a}$ pentru fiecare corp:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad m_1\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{f1} = m_1\vec{a}, \\ &\text{(b)} \quad m_2\vec{g} + \vec{T}' + \vec{N}_2 + \vec{F}_{f2} = m_2\vec{a}, \\ &\qquad\qquad \vec{T}' = -\vec{T}. \end{aligned} \tag{8}$$

Pentru mișcarea de rotație a cilindrului, ecuația $M = I\varepsilon$ dă

$$F_{f1} R = I\varepsilon, \quad (\varepsilon \text{ — accelerația unghiulară}). \tag{9}$$

Întrucît cărămida lunecă ($\mu = 0{,}20 < \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}577$), avem legea forței de frecare la lunecare:

$$F_{f2} = \mu N_2. \tag{10}$$

Proiectăm ecuațiile (8) pe o direcție paralelă cu planul înclinat și pe o direcție perpendiculară pe planul înclinat:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad m_1 g \sin\alpha - T - F_{f1} = m_1 a\,; \quad N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0\,; \\ &\text{(b)} \quad m_2 g \sin\alpha + T - F_{f2} = m_2 a\,; \quad N_2 - m_2 g \cos\alpha = 0\,; \\ &\qquad\qquad F_{f2} = \mu N_2 = \mu m_2 g \cos\alpha. \end{aligned} \tag{11}$$

Considerînd că cilindrul se rostogolește fără să lunece, rezultă relația

$$a = \varepsilon R. \tag{12}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvînd sistemul format din ecuaţiile (9) şi (12), obţinem acceleraţia a (7), precum şi forţele :

$$F_{f1} = aI/R^2 = 3{,}25\ (\mathrm{m/s^2})\ 4{,}00\ \mathrm{kg} = 13{,}0\ \mathrm{N}, \tag{13}$$

$$T = m_2 g \frac{\mu(m_1 + I/R^2)\cos\alpha - (I/R^2)\sin\alpha}{m_1 + m_2 + I/R^2} = 0{,}186\ \mathrm{N}. \tag{14}$$

Condiţia de rostogolire fără lunecare este ca forţa de frecare F_{f1} (13), necesară rostogolirii fără lunecare, să fie mai mică decît forţa maximă de frecare posibilă :

$$F_{f1} < \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g \cos\alpha, \tag{15}$$

de unde coeficientul de frecare statică dintre cilindru şi plan trebuie să fie

$$\mu_1 > F_{f1}/m_1 g \cos\alpha = 0{,}123. \tag{16}$$

Condiţia ca cele două corpuri să se mişte cu aceeaşi acceleraţie, adică firul să fie întins, este :

$$T > 0,\ \mu > \frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1 + m_1 R^2/I}. \tag{17}$$

În cazul problemei noastre, condiţia (17) dă $\mu > 0{,}192$.

Să considerăm cazul cînd condiţia (15) nu este îndeplinită. Atunci cilindrul se rostogoleşte şi în acelaşi timp lunecă. Ecuaţiile devin :

$$\begin{aligned} m_1 g \sin\alpha - T - \mu_1 m_1 g \cos\alpha &= m_1 a, \\ m_2 g \sin\alpha + T - \mu_2 m_2 g \cos\alpha &= m_2 a, \\ (\mu_1 m_1 g \cos\alpha \cdot R &= I\varepsilon). \end{aligned} \tag{18}$$

De unde

$$a = g \frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\cos\alpha}{m_1 + m_2}, \tag{19}$$

$$T = \frac{m_1 m_2\, g \cos\alpha}{m_1 + m_2}(\mu_2 - \mu_1). \tag{20}$$

Condiţia ca în acest caz cele două corpuri să aibă aceeaşi acceleraţie ($T > 0$) cere ca $\mu_2 > \mu_1$, condiţie care era de aşteptat, dacă comparăm acceleraţiile de lunecare liberă, separată, a fiecărui corp ($g\sin\alpha - g\mu_1\cos\alpha$, respectiv $g\sin\alpha - g\mu_2\cos\alpha$).

Problema 2. Să notăm cu indicele zero mărimile referitoare la 0°C. Atunci masele sînt :

$$m_1 = V_{10}\rho_0,\quad m_2 = V_{20}\rho_0,\ (\rho_0 \text{ — densitatea la } 0°\mathrm{C}) \tag{1}$$

şi condiţia de schimb de căldură :

$$\begin{aligned} m_2 c(\theta_2 - \theta_f) &= m_1 c(\theta_f - \theta_1), \\ V_{20}\rho_0\, c(\theta_2 - \theta_f) &= V_{10}\rho_0\, c(\theta_f - \theta_1) \end{aligned} \tag{2}$$

sau $V_{20}(\theta_2 - \theta_f) = V_{10}(\theta_f - \theta_1)$, (3) de unde $\theta_f = \frac{V_{10}\theta_1 + V_{20}\theta_2}{V_{10} + V_{20}}$. (4)

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte,

$$V_2 = V_{20}(1 + \beta\theta_2),\quad V_{20} = \frac{V_2}{1 + \beta\theta_2} = \frac{110\ \text{cm}^3}{1 + 10 \cdot 10^{-4}\ \text{K}^{-1}\ 100\ \text{K}} = 100\ \text{cm}^3. \tag{5}$$

Prin urmare, din (4) rezultă temperatura finală de echilibru

$$\theta_f = \frac{V_{10}\theta_1 + V_{20}\theta_2}{V_{10} + V_{20}} = \frac{300 \cdot 0 + 100 \cdot 100}{300 + 100} = 25°\text{C}. \tag{6}$$

Volumele finale vor fi acum :

$$V_{1f} = V_{10}(1 + \beta\theta_f) = 300\ \text{cm}^3\ (1 + 10 \cdot 10^{-4}\ \text{K}^{-1}\ 25\ \text{K}) = 307{,}5\ \text{cm}^3,$$
$$V_{2f} = V_{20}(1 + \beta\theta_f) = 102{,}5\ \text{cm}^3, \tag{7}$$
$$V_{1f} + V_{2f} = 307{,}5 + 102{,}5 = 410\ \text{cm}^3 = V_1 + V_2 = \text{invar}.$$

Rezultatul obţinut este de fapt general :

Prin amestecarea a două volume din acelaşi lichid, aflate la temperaturi diferite, volumul global nu se schimbă după atingerea echilibrului termic (cu cît se dilată un volum cu atît se contractă celălalt).

În adevăr, avem succesiv

$$V_{10} = \frac{V_1}{1 + \beta\theta_1},\qquad V_{20} = \frac{V_2}{1 + \beta\theta_2}, \tag{8}$$

$$m_1 = V_{10}\rho_0,\qquad m_2 = V_{20}\rho_0. \tag{9}$$

Ecuaţia schimbului de căldură :

$$m_1 c(\theta_f - \theta_1) = m_2 c(\theta_2 - \theta_f) \tag{10}$$

sau $$V_{10}(\theta_f - \theta_1) + V_{20}(\theta_f - \theta_2) = 0. \tag{11}$$

Pe de altă parte, volumele finale sînt :

$$V_{1f} = V_{10}(1 + \beta\theta_f) = V_{10}[1 + \beta\theta_1 + \beta(\theta_f - \theta_1)] = V_1 + V_{10}\beta(\theta_f - \theta_1),$$
$$V_{2f} = V_{20}(1 + \beta\theta_f) = V_2 + V_{20}\beta(\theta_f - \theta_2). \tag{12}$$

Prin urmare, volumul total :

$$V_{1f} + V_{2f} = V_1 + V_2 + \beta[V_{10}(\theta_f - \theta_1) + V_{20}(\theta_f - \theta_2)] = V_1 + V_2 \tag{13}$$

unde am ţinut seama de (11).

Problema 2. Se consideră raza de lumină ce intră în semicilindru în punctul A. Construind raza refractată AC, se constată că triunghiul AOC este un triunghi isoscel (fig. II.6, *R*). Conform legii refracţiei, fasciculul paralel de raze de lumină ce străbate faţa plană a semicilindrului face, cu normalele respective, unghiuri de refracţie $\beta = 30°$. Unghiul făcut de raza AC cu normala în punctul C, este $\gamma = 60°$. Cum unghiul limită în cazul de faţă este $\gamma_l = 45°$ urmează că raza AC va fi reflectată total. Urmărind mersul acestei raze se poate constata că ea suferă o nouă reflexie totală în D pentru ca în final să iasă din semicilindru prin punctul B.

Scanned with OKEN Scanner

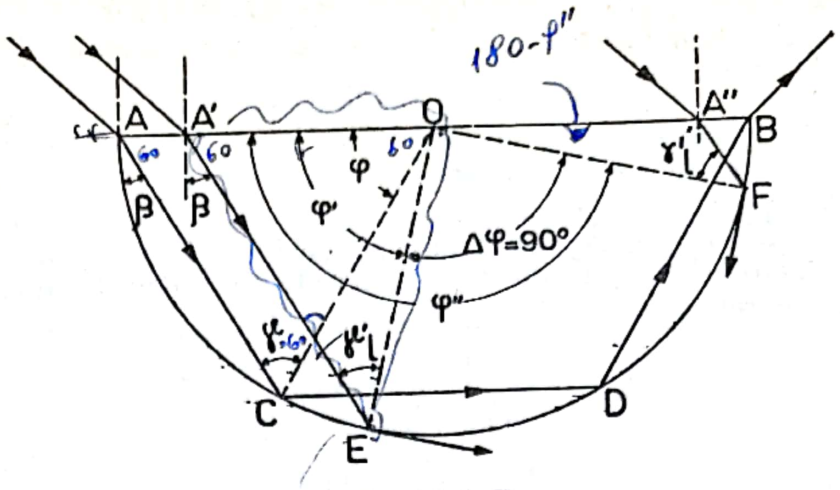


Fig. II.6, R.

Este necesar să se determine limitele între care trebuie să fie cuprins unghiul φ (făcut de normala la fața de ieșire cu fața de intrare) astfel ca razele ce străbat semicilindrul să poată ieși prin suprafața lui laterală. Considerînd jumătatea din stînga a semicilindrului, din triunghiul $A'OE$ se obține : $\varphi' + 60° + 45° = 180°$, deci $\varphi' = 75°$. Pentru jumătatea din dreapta, din triunghiul OFA'', se obține :

$$(180° - \varphi'') + (180° - 60°) + 45° = 180°, \text{ deci } \varphi'' = 165°.$$

Rezultă că numai acele raze pot ieși prin suprafața laterală a semicilindrului pentru care este îndeplinită condiția :

$$75° < \varphi < 165°.$$

Lucrarea experimentală. În urma încercărilor făcute cu voltmetrul asupra celor 3 cutii se constată că nici una din ele nu conține vre-o sursă de curent.

Prima cutie. Se realizează, pe rînd, un circuit de curent continuu, respectiv alternativ, care cuprinde : sursa de curent (continuu, alternativ), cutia analizată și instrumentele de măsură. Se măsoară în ambele cazuri tensiunea la bornele cutiei și intensitatea curentului din circuit. Aplicînd legea lui Ohm se obține : *a)* în curent continuu $R = 700\ \Omega \pm 4\%$; *b)* în curent alternativ $Z = 2\,200\ \Omega \pm 6\%$.

În concluzie, prima cutie conține un circuit echivalent unei bobine cu rezistență ohmică și reactanță inductivă în serie. Valoarea rezistenței ohmice fiind 700 Ω, reactanța inductivă se deduce din relația :

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{2\,200^2 - 700^2} = 2\,070\ \Omega \pm 8\%$$

iar inductanța va fi dată de $L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{2\,070}{314} \approx 6{,}6\ \text{H} \pm 8\%$.

A doua cutie. Procedînd ca și în cazul primei cutii, se obține atît în curent continuu cît și în curent alternativ aceeași valoare 3 700 Ω.

În concluzie, în cutie se află un circuit echivalent unui rezistor cu rezistența de mai sus.

Scanned with OKEN Scanner

A treia cutie. Se determină din nou rezistența cutiei în curent continuu și curent alternativ. Se obțin următoarele date: *a)* în curent continuu $R_c \simeq \simeq 30\,000\ \Omega$ și *b)* în curent alternativ $Z = 6\,600\ \Omega \pm 6\%$. Cum în curent continuu rezistență măsurată este de ordinul de mărime al rezistenței voltmetrului, înseamnă că rezistența cutiei este mult mai mare (prin voltmetru trece un curent de scurtcircuit).

În concluzie în cutie se află un circuit echivalent unui condensator cu reactanța capacitivă $X_c = 6\,600\ \Omega$. Capacitatea condensatorului poate fi determinată din relația:

$$C = \frac{1}{\omega X_c} = \frac{1}{314 \cdot 6\,600} \approx 4{,}9\ \mu F \pm 6\%.$$

A III-a
Olimpiadă internațională de fizică
1969, Brno, R. S. Cehoslovacă

Problema 1. α. Scripetele fiind ideal, tensiunea din fir este aceeași de o parte și de alta a scripetelui. Cărucioarele A și B fiind în repaus față de cărucior rul C, înseamnă că toate cărucioarele se mișcă cu aceeași accelerație orizontală.

În figura II.7, R sînt reprezentate toate forțele (exterioare) care acționează: *a)* asupra întregului sistem, *b)* asupra cărucior ului B și *c)* asupra cărucior ului A. În cazul *a)* al întregului sistem, tensiunea din fir este evident o forță internă.

Pentru întregul sistem avem pe direcția orizontală:

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a. \tag{1}$$

Pentru cărucior ul B avem pe direcția orizontală:

$$T = m_2 a. \tag{2}$$

Pentru cărucior ul C avem pe direcția verticală

$$m_1 g - T = 0. \tag{3}$$

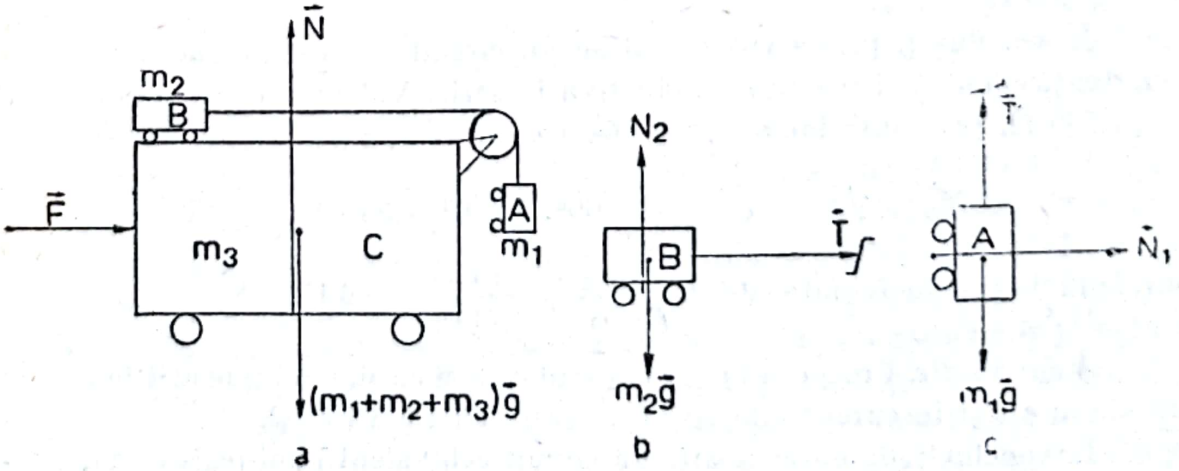


Fig. II.7, R.

Rezolvînd sistemul (1—3), găsim :

$$T = m_1 g = 0{,}300 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 2{,}94 \text{ N};$$

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)\frac{m_1}{m_2} g = 2{,}00 \text{ kg} \frac{300}{200} 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 29{,}4 \text{ N}. \quad (4)$$

β. Acum cărucior ul C este fix. Cărucioarele A și B fiind legate printr-un fir se mișcă cu aceeași accelerație în valoarea absolută (pentru B orizontală, pentru C verticală).

Pentru cărucior ul B pe direcția orizontală (la dreapta) :

$$T = m_2 a. \quad (5)$$

Pentru cărucior ul C pe direcția verticală (în jos) :

$$m_1 g - T = m_1 a. \quad (6)$$

Rezolvînd sistemul (5—6) rezultă :

$$a = g \frac{m_1}{m_1 + m_2} = 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{300}{500} = 5{,}88 \text{ m/s}^2, \quad T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 1{,}18 \text{ N}. \quad (7)$$

Problema 2. Este posibil ca o parte m_{3a} din gheață să se topească (dacă gheața m_3 nu este prea multă și nu este prea rece și apa m_2 din vas este multă și suficient de caldă). De asemenea, este posibil ca o parte m_{2g} din apa din vas să se transforme în gheață (dacă gheața m_3 este multă și foarte rece și apa m_2 din vas este puțină și rece).

Sînt posibile următoarele patru procese :

a) Toată gheața m_3 se topește și temperatura finală θ este cuprinsă între 0°C și θ_2 :

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2)(\theta_2 - \theta) = m_3 c_3(-\theta_3) + m_3 \lambda + m_3 c_2 \theta, \quad (1)$$

(λ — căldura latentă specifică de topire a gheții).

Are sens fizic numai soluția θ care verifică condiția amintită $0 < \theta < \theta_2$. Masa finală de apă este : $m_2 + m_3$; nu avem gheață.

b) Toată apa m_2 din calorimetru se transformă în gheață și temperatura finală θ verifică condiția $\theta_3 < \theta < 0$:

$$m_1 c_1(\theta_2 - \theta) + m_2 c_2 \theta_2 + m_2 \lambda + m_2 c_3(-\theta) = m_3 c_3(\theta - \theta_3). \quad (2)$$

Are sens fizic numai soluția θ care verifică condiția $\theta_3 < \theta < 0$. Masa finală de gheață este : $m_2 + m_3$; nu avem apă.

c) O parte m_{3a} din gheața m_3 se topește. Temperatura finală este 0°C, deoarece avem apă și gheață în echilibru termic. Masa m_{3a} se obține din ecuația :

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2)\theta_2 = m_3 c_3(-\theta_3) + m_{3a}\lambda. \quad (3)$$

Are sens fizic numai soluția : $0 \leqslant m_{3a} \leqslant m_3$. Masa finală de apă este : $m_2 + m_{3a}$ iar masa finală de gheață : $m_3 - m_{3a}$.

d) O parte m_{2g} din apa m_2 se transformă în gheață. Temperatura finală este 0°C, deoarece avem apă și gheață în echilibru termic. Masa m_{2g} se obține din ecuația :

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2)\theta_2 + m_{2g}\lambda = m_3 c_3(-\theta_3). \quad (4)$$

Are sens fizic numai soluția care verifică condiția $0 \leqslant m_{2g} \leqslant m_2$. Masa finală de apă este : $m_2 - m_{2g}$ iar masa finală de gheață : $m_3 + m_{2g}$.

În cazul valorilor numerice date, să calculăm căldura disponibilă prin răcirea vasului avînd masa m_1 și a apei avînd masa m_2 pînă la 0°C :

$$Q_{disp} = (m_1c_1 + m_2c_2)\theta_2 = (1{,}00\ \text{kg}\cdot 395\ \text{J/kg}\cdot\text{K} + 1{,}00\ \text{kg}\cdot 4\,180\ \text{J/kg}\cdot\text{K})\cdot 10\ \text{K} = 45{,}75\ \text{kJ}. \quad (5)$$

Căldura necesară gheții pentru a se încălzi pînă la 0°C :

$$Q_{nec} = m_3c_3(-\theta_3) = 2{,}00\ \text{kg}\cdot 2\,050\ (\text{J/kg}\cdot\text{K})\ 20\ \text{K} = 82{,}0\ \text{kJ}. \quad (6)$$

Prin urmare, Q_{disp} nu este suficient pentru a încălzi gheața m_3 pînă la 0°C. De aceea va începe un proces de înghețare a apei m_2 din vas. Dacă ar îngheța toată apa m_2 s-ar mai degaja suplimentar :

$$Q_{ingh} = m_2\lambda = 1{,}00\ \text{kg}\cdot 335\ \text{kJ/kg} = 335\ \text{kJ}, \quad (7)$$

ceea ce depășește necesarul Q_{nec} (6). De aceea numai o parte m_{2g} din apa m_2 va îngheța :

$$m_{2g} = \frac{Q_{nec} - Q_{disp}}{\lambda} = \frac{82{,}0 - 45{,}75}{335}\ \text{kg} = 108\ \text{g}. \quad (8)$$

Rezultatul se obține evident și din ecuația (4) :

$$m_{2g} = \frac{m_3c_3(-\theta_3) - (m_1c_1 + m_2c_2)\theta_2}{\lambda}. \quad (9)$$

Prin urmare, temperatura finală este $\theta = 0$°C ; masa de apă : $m_2 - m_{2g} = 0{,}892$ kg ; masa de gheață : $m_3 + m_{2g} = 2{,}108$ kg.

Problema 3. Firul va fi întins sub acțiunea rezultantei forțelor $\vec{G} = m\vec{g}$ și $\vec{F} = q\vec{E}$, unde $\vec{E}$ este intensitatea cîmpului electric în punctul C la distanța x de centrul inelului (fig. II.8, *a*, *R*).

Din asemănarea triunghiurilor AOC și CMN rezultă :

$$\frac{x}{R} = \frac{Eq}{mg}. \quad (1)$$

Pentru a determina intensitatea cîmpului electric în punctul C vom descompune inelul în n elemente foarte mici, de lungime egală, astfel ca pe fiecare element să existe sarcina electrică $\frac{Q}{n}$. Intensitatea cîmpului electric în punctul C (fig. II.8, *b*, *R*) produsă de un singur element este

$$\Delta E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l^2 \cdot n}. \quad (2)$$

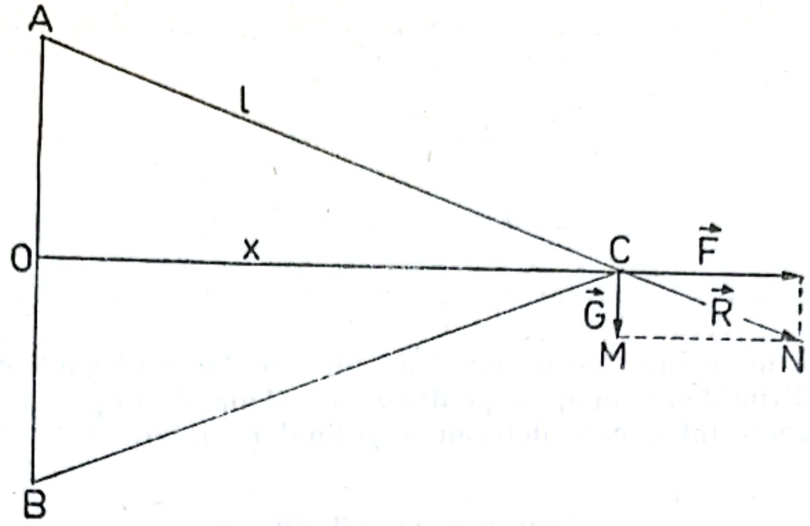
Descompunem vectorul $\Delta\vec{E}$ după două direcții perpendiculare (una din aceste direcții fiind OC). Cele două componente au valorile :

$$\Delta E_r = \Delta E\cdot\sin\alpha \text{ și } \Delta E_x = \Delta E\cdot\cos\alpha.$$

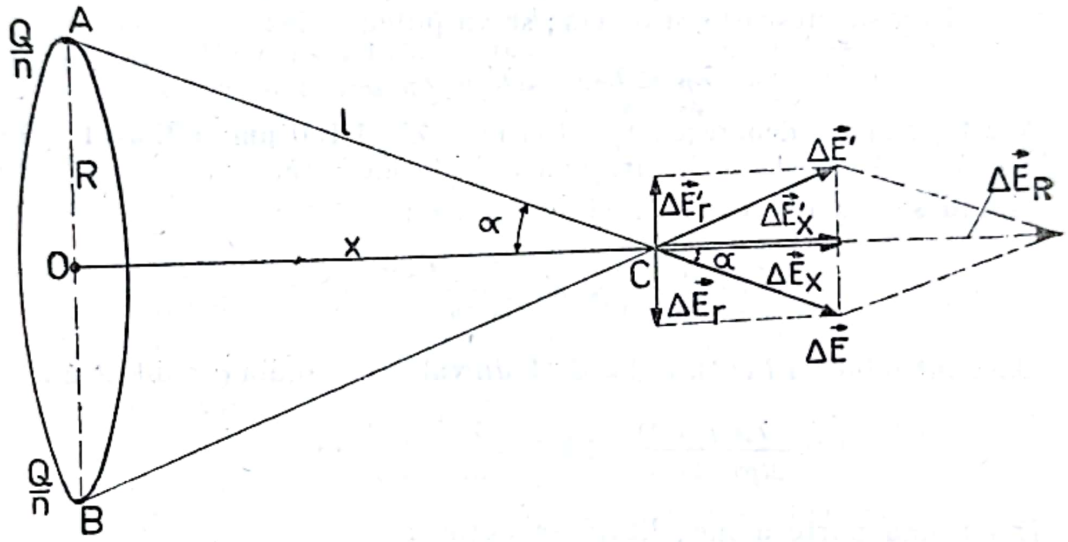
Fiecărei sarcini elementare $\frac{Q}{n}$ de pe inel îi corespunde o sarcină elementară, egală, diametral opusă (de exemplu, A și B), care, din motive de simetrie, vor da în C, cîmpuri de aceeași intensitate dirijate după AC și BC. Componentele $\Delta\vec{E}_r$ și $\Delta\vec{E}'_r$ fiind egale și de sens contrar se anulează reciproc, deci vor rămîne doar componentele dirijate după OC care prin însumare vor da :

$$\Delta E_R = 2\Delta E_x = 2\Delta E\cdot\cos\alpha.$$

Scanned with OKEN Scanner



a



b

Fig. II.8, R.

Cîmpul total în C creat de toate perechile de sarcini elementare $\frac{Q}{n}$ va fi:

$$E = E_x = \frac{n}{2} \cdot 2\Delta E_x = n \cdot \Delta E \cos \alpha \text{ şi cum}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{l} \text{ avem } E = n \cdot \Delta E \frac{x}{l} \cdot \tag{3}$$

Înlocuind pe ΔE din relaţia (2) în relaţia (3) rezultă: $E = \frac{Q \cdot x}{4\pi\varepsilon_0 l^3}$.

Introducînd pe E în relaţia (1) vom avea:

$$\frac{x}{R} = \frac{Q \cdot x \cdot q}{4\pi\varepsilon_0 l^3 \cdot mg} \text{ de unde } l = \sqrt[3]{\frac{QqR}{4\pi\varepsilon_0 \cdot mg}} \cdot \tag{4}$$

Prin înlocuire cu datele numerice se obţine pentru l valoarea de $7{,}2 \cdot 10^{-2}$ m.

Scanned with OKEN Scanner

Problema 4. Condiția ca în pana de aer de grosime d să se producă, în cazul interferenței, franje de maxim este :

$$2\ nd - \frac{\lambda_k}{2} = 2\ k\ \frac{\lambda_k}{2}\ (k = 0,\ 1,\ 2\ldots)$$

respectiv :

$$2\ nd = (2\ k + 1)\ \frac{\lambda_k}{2} \tag{1}$$

unde d este grosimea stratului de aer, n indicele de refracție și k ordinul de interferență.

Cea mai mare lungime de undă a radiației electromagnetice este $\lambda' = 1\ 150$ nm. Primul maxim apare pentru $\lambda = 400$ nm, deci $\lambda_p = 400$ nm, unde p este un număr întreg care determină ordinul de interferență. Vom putea scrie :

$$\lambda_p \cdot (2p + 1) = 4\ dn. \tag{2}$$

Din ecuația (1) reiese că pentru d constant și k descrescător valorile lui λ_k formează un șir crescător și invers ; se va putea scrie :

$$\lambda_p < \lambda_{p-1} < \lambda' < \lambda_{p-2}.$$

Acest șir apare deoarece : $\lambda_p = 400$ nm ; $\lambda' = 1\ 150$ nm și $3\lambda_p = 1\ 200$ nm deci între λ_p și λ' există o singură valoare intermediară.

Ținînd seama de cele de mai sus, avem :

$$\frac{4\ dn}{2(p-1)+1} < \lambda' < \frac{4\ dn}{2(p-2)+1}. \tag{3}$$

Dacă introducem în (3), în loc de $4\ dn$ valoarea lui din (2) obținem :

$$\frac{\lambda_p(2p+1)}{2(p-1)+1} < \lambda' < \frac{\lambda_p(2p+1)}{2(p-2)+1}.$$

Din prima parte a inegalității se obține :

$$\lambda_p(2p+1) < \lambda'(2p-1) \text{ sau } 2p(\lambda' - \lambda_p) > \lambda' + \lambda_p$$

ceea ce înseamnă că :

$$p > \frac{1}{2}\ \frac{\lambda' + \lambda_p}{\lambda' - \lambda_p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1\ 150 + 400}{1\ 150 - 400} = 1,\ldots \tag{4}$$

În același mod din partea a doua a inegalității se obține :

$$\lambda_p(2p+1) > \lambda'(2p-3) \text{ sau } 2p(\lambda' - \lambda_p) < 3\lambda' + \lambda_p$$

ceea ce înseamnă că :

$$p < \frac{1}{2} \cdot \frac{3\lambda' + \lambda_p}{\lambda' - \lambda_p} = \frac{3 \cdot 1\ 150 + 400}{1\ 150 - 400} = 2,\ldots \tag{5}$$

Din cele două inegalități rezultă că ordinul de interferență este $p = 2$.

Se determină grosimea stratului de aer ;

$$d = \frac{\lambda_p(2p+1)}{4n} = \frac{400 \cdot 5}{4} = 500 \text{ nm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Acum se poate deduce ușor valoarea lui λ_1 din ecuația (1) înlocuind pe k cu $p-1$;

$$\lambda_1 = \frac{4\,dn}{2(p-1)+1} = \frac{4\,dn}{2p-1} =$$

$$= \frac{4 \cdot 500}{3} = 666{,}7 \text{ nm}.$$

Determinarea variației de temperatură a cubului. Ecuația dilatației termice este:

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta t.$$

În cazul problemei $\Delta l = d$, vom scrie $d = \alpha l_0 \Delta t$ de unde:

$$\Delta t = \frac{d}{\alpha l_0} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{8 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = \frac{50}{16} \approx 3{,}1°\text{C}.$$

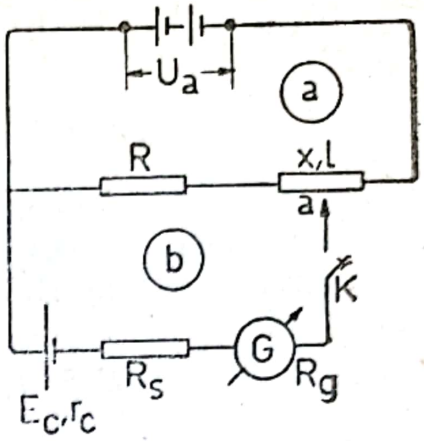


Fig. II.9, R.

Lucrarea experimentală. Pentru compararea tensiunilor electromotoare ale celor două surse de curent (acumulator și baterie uscată) se folosește metoda opoziției. Ea constă în anularea curentului printr-una din sursele de curent, ceea ce se poate realiza numai cînd bornele de aceleași semn ale celor două surse sînt legate între ele. În figura II.9, R se dă schema de conexiune corespunzătoare unde:

U_a = tensiunea la bornele acumulatorului; E_c = tensiunea electromotoare a bateriei uscate;
r_c = rezistență internă a bateriei; R_s = rezistență — siguranță;
R_g = rezistența galvanometrului; K = întrerupător;
C = contact mobil (cursor); R = rezistența în decade;
X = rezistența necunoscută; l = lungimea firului din care e confecționată această rezistență.

Galvanometrul îndeplinește în acest caz rolul unui instrument de zero. Un avantaj al metodei (opoziției) este că intensitatea curentului care circulă printr-una din sursele de curent este egală cu zero și, în consecință, nu are importanță căderea de tensiune în interiorul sursei respective, cădere care micșorează valoarea tensiunii măsurate la bornele sursei, în metodele de măsură în care prin sursă circulă un curent foarte slab.

Pentru a răspunde la întrebările puse se vor lua în considerare următoarele cazuri:

a) Se reglează rezistența în decade astfel ca $R = 0$. Se închide circuitul *b* cu ajutorul lui K și apoi se caută o poziție a contactului mobil C, astfel ca intensitatea curentului prin galvanometru să fie zero; fie a_1 aceasta poziție.

Aplicînd legile lui Kirchhoff pentru circuitele *a* și *b*, vom putea scrie:

$$U_a = I_1 R + I_1 \frac{a_1}{l} X + I_1' \frac{l - a_1}{l} X; \qquad (1)$$

$$E_c = I_2 r_c + I_2 R_s + I_2 R_g + I_1 R + I_1 \frac{a_1}{l} X. \qquad (2)$$

Se știe că: $R = 0$ și cum: $I_2 = 0$, urmează că $I_1' = I_1$, deci

$$U_a = I_1 \left(\frac{a_1}{l} + \frac{l - a_1}{l} \right) X; \qquad (1')$$

$$E_c = I_1 \frac{a_1}{l} X. \qquad (2')$$

Scanned with OKEN Scanner

Împărțind (2′) la (1′) obținem

$$\frac{E_c}{U_a} = \frac{a_1}{l} \text{ sau notînd } \frac{a_1}{l} = m, \text{ avem } \frac{E_c}{U_a} = m.$$

b) Se reglează rezistența în decade astfel ca $R \neq 0$. Pentru ca $I_g = 0$, trebuie căutată o nouă poziție a contactului mobil, fie a_2 această poziție.

Aplicînd legile lui Kirchhoff aceloraşi circuite vom obține:

$$U_a = I_1' R + I_1' \frac{a_2}{l} X + I_1'' \frac{l - a_2}{l} X; \tag{3}$$

$$E_c = I_2' r_c + I_2' R_s + I_2' R_g + I_1' \frac{a_2}{l} + I_1' R \tag{4}$$

unde: $I_2' = 0$, $I_1' = I_1''$ şi $R \neq 0$.

Supunînd acestor condiții ecuațiile (3) şi (4), vom avea:

$$U_a = I_1' \left(R + \frac{a_2}{l} X + \frac{l - a_2}{l} X \right); \tag{3′}$$

$$E_c = I_1' \left(\frac{a_2}{l} X + R \right). \tag{4′}$$

Împărțind pe (4′) la (3′) obținem:

$$\frac{E_c}{U_a} = \frac{R + \frac{a_2}{l} X}{R + \frac{a_2}{l} X + \frac{l - a_2}{l} X}. \tag{5}$$

Notînd cu n pe $\frac{a_2}{l}$ avem: $\frac{E_c}{U_a} = \frac{R + nX}{R + X}$ (5′)

Din ecuația (5′) se obține: $X = R \frac{1 - m}{m - n}$. (6)

Discuție. Pentru ca $X > 0$, trebuie ca: $1 > m > n > 0$. Pe de altă parte, din ecuația (5′) rezultă că:

$$\frac{E_c}{U_a} > \frac{R}{R + X}. \tag{7}$$

Ținînd seama de faptul că: $\frac{E_c}{U_a} = m$, vom avea:

$$m > \frac{R}{R + x} \text{ sau } R < \frac{mX}{1 - m}. \tag{8}$$

Deci, partea a doua a lucrării (*b*) poate fi efectuată numai dacă este realizată condiția (8).

Scanned with OKEN Scanner

A IV-a

Olimpiadă internațională de fizică

1970, Moscova, U.R.S.S.

Problema 1. *Primul caz.* Forțele care acționează asupra scîndurii și săniuței sînt reprezentate în figura II.10, R (a și b).

Săniuța are o mișcare rectilinie uniformă față de pămînt cu viteza v_0. Ecuația fundamentală se scrie pentru săniuță:

$$T - F_f = 0, \qquad N_1 - mg = 0. \tag{1}$$

La început scîndura este ținută fixă și săniuța lunecă cu viteza v_0. Atunci asupra scîndurii acționează forța de frecare

$$F_f = \mu N_1 = \mu mg. \tag{2}$$

Această forță îi imprimă scîndurii accelerația:

$$a = F_f/M = g\mu m/M. \tag{3}$$

Viteza scîndurii, după eliberare, crește uniform de la zero pînă la v_0 cînd săniuța și scîndura se vor mișca cu aceeași viteză v_0. Timpul cît durează mișcarea accelerată a scîndurii:

$$t = v_0/a = v_0 M/\mu mg = \frac{0{,}10(\text{m/s}) \cdot 1{,}00 \text{ kg}}{0{,}020 \cdot 0{,}100 \text{ kg } 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 5{,}1 \text{ s}. \tag{4}$$

După acest timp încetează lunecarea săniuței pe scîndură, ele mișcîndu-se mai departe solidar cu viteza v_0 (dispare și forța de frecare dintre săniuță și scîndură).

Drumul parcurs de săniuță pe scîndură în acest timp este evident:

$$s = v_0 t - at^2/2 = \frac{v_0}{2} t = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2 M}{2\mu mg} =$$

$$= \frac{0{,}10^2(\text{m}^2/\text{s}^2)1{,}00 \text{ kg}}{2 \cdot 0{,}020 \cdot 0{,}100 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2} = 0{,}256 \text{ m} < l = 0{,}50 \text{ m}. \tag{5}$$

Prin urmare săniuța nu poate ajunge la marginea scîndurii (decît dacă scîndura va întîmpina vreun obstacol pînă la par).

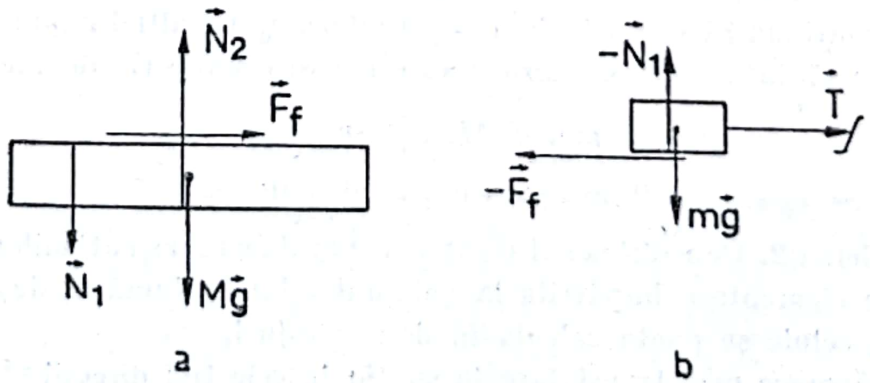


Fig. II.10, R.

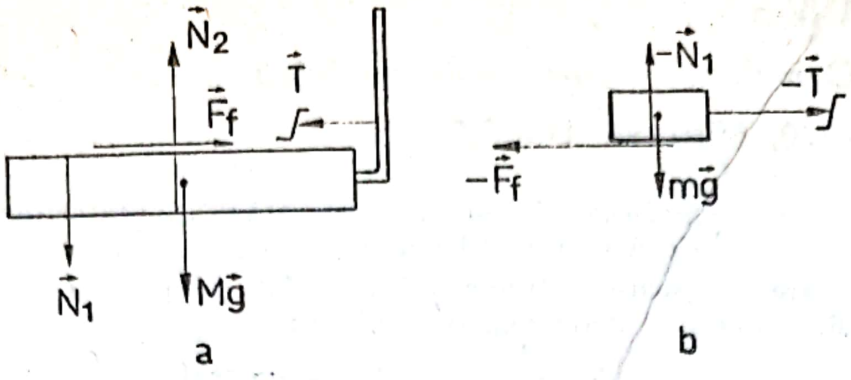


Fig. II.11, R.

Al doilea caz. În acest caz săniuţa se mişcă uniform cu viteza v_0 faţă de scîndură, deci ajunge la marginea scîndurii în timpul:

$$t = \frac{l}{v_0} = \frac{0{,}50 \text{ m}}{0{,}10 \text{ m/s}} = 5{,}0 \text{ s}. \tag{6}$$

După pornirea săniuţei şi eliberarea scîndurii, asupra sistemului nu lucrează forţe orizontale, de aceea impulsul total pe direcţia orizontală se conservă:

$$mv_1 + Mv_2 = P = \text{const}, \tag{7}$$

unde v_1, v_2 sînt vitezele săniuţei, respectiv scîndurii, faţă de pămînt. Cum viteza săniuţei faţă de scîndură este: $v_0 = v_1 - v_2 = \text{const}$, (8)

rezultă $$v_1 = \frac{Mv_0 + P}{m + M} = \text{const}, \quad v_2 = \frac{P - mv_0}{m + M} = \text{const}, \tag{9}$$

deci corpurile se mişcă uniform faţă de pămînt.

Altfel spus, centrul de masă al sistemului se mişcă rectiliniu uniform (sau este în repaus) faţă de pămînt.

Forţele care acţioncază asupra scîndurii şi săniuţei sînt reprezentate în figura II.11, *R* (*a* şi *b*).

Mişcarea corpurilor fiind uniformă, forţele îşi fac echilibru:

$$T - F_f = 0. \tag{10}$$

Prin urmare, după ce săniuţa porneşte şi atinge viteza v_0, nu mai este nevoie de forţă pentru a ţine scîndura, şi eliberînd-o, ea va rămîne în repaus, iar săniuţa va continua să se miste înainte cu viteza v_0. De altfel impulsul sistemului după ce săniuţa a atins viteza v_0 este mv_0 şi ecuaţia (7) devine:

$$mv_0 = mv_1 + Mv_2, \qquad v_0 = v_1 - v_2, \tag{11}$$

de unde $v_1 = v_0$ şi $v_2 = 0$, aşa cum am găsit mai sus.

Problema 2. Densitatea substanţei este egală cu masa atomilor care revin unei celule elementare împărţită la volumul celulei. Numărul de atomi care revin unei celule se poate calcula în două moduri.

a) Deoarece prin translatare în spaţiu în cele trei direcţii se obţine întreaga structură cristalină, înseamnă că trei feţe ale celulei (de exemplu, feţele

Scanned with OKEN Scanner

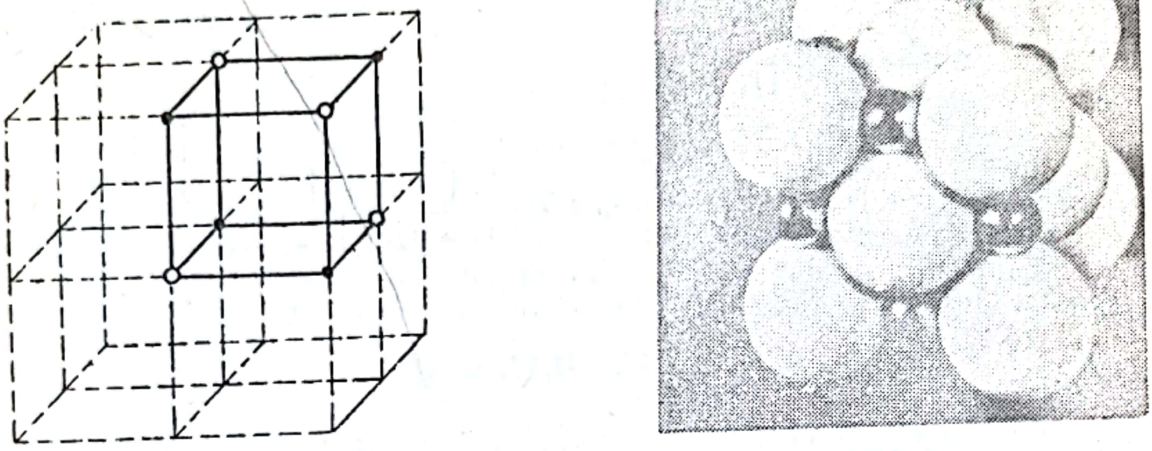


Fig. II.12, R.

conţinute în planele de coordonate *Oxyz*) nu trebuie socotite în volumul celulei. Rămîn astfel numai cei 8 atomi (4 Na + 4 Cl) din cubul desenat în figura II.12, *R*.

b) Putem judeca şi astfel. Fiecare atom dintr-un colţ (vîrf) al celulei aparţine simultan la cele 8 celule vecine care au acel vîrf în comun, deci numai 1/8 din acel atom aparţine sau revine unei celule.

Fiecare atom din mijlocul unei muchii aparţine simultan la cele 4 celule vecine care au acea muchie în comun, deci numai 1/4 din acel atom aparţine unei celule.

Fiecare atom din mijlocul unei feţe aparţine simultan la cele 2 celule vecine care au acea faţă în comun, deci numai 1/2 din acel atom aparţine unei celule.

Atomul din centrul celulei aparţine numai celulei respective.

Prin urmare unei celule îi aparţin

$$\frac{1}{8}\cdot 8 + \frac{1}{2}\cdot 6 = 4 \text{ atomi Cl}; \frac{1}{4}\cdot 12 + 1 = 4 \text{ atomi Na.} \qquad (1)$$

Notînd masa atomică relativă cu A_{Cl}, respectiv A_{Na}, putem scrie

$$\rho = \frac{4m_{Cl} + 4m_{Na}}{a^3} = \frac{4A_{Cl}m_H + 4A_{Na}m_H}{a^3}, \qquad (2)$$

(m_{Cl}, m_{Na}, m_H — masele atomilor respectivi).

$$\text{De unde } m_H = \frac{\rho a^3}{4(A_{Cl} + A_{Na})} = \frac{2{,}22\cdot 10^3 (\text{kg/m}^3)(5{,}6)^3\cdot 10^{-30}\,\text{m}^3}{4(35{,}5 + 23)} =$$

$$= 1{,}67\cdot 10^{-27} \text{ kg.} \qquad (3)$$

Problema 3. Sarcina Q de pe sfera goală de rază R este repartizată pe suprafaţa ei interioară şi exterioară. Pe sfera din interior, de rază r, se produce prin influenţă o sarcină q de semn contrar lui Q (fig. II.13,*R*).

Pentru a determina potenţialul sferei exterioare procedăm astfel:

Se ştie că potenţialul unui conductor sferic încărcat uniform este egal cu potenţialul la o distanţă egală cu raza sferei, considerînd sarcina concentrată în centrul sferei.

Scanned with OKEN Scanner

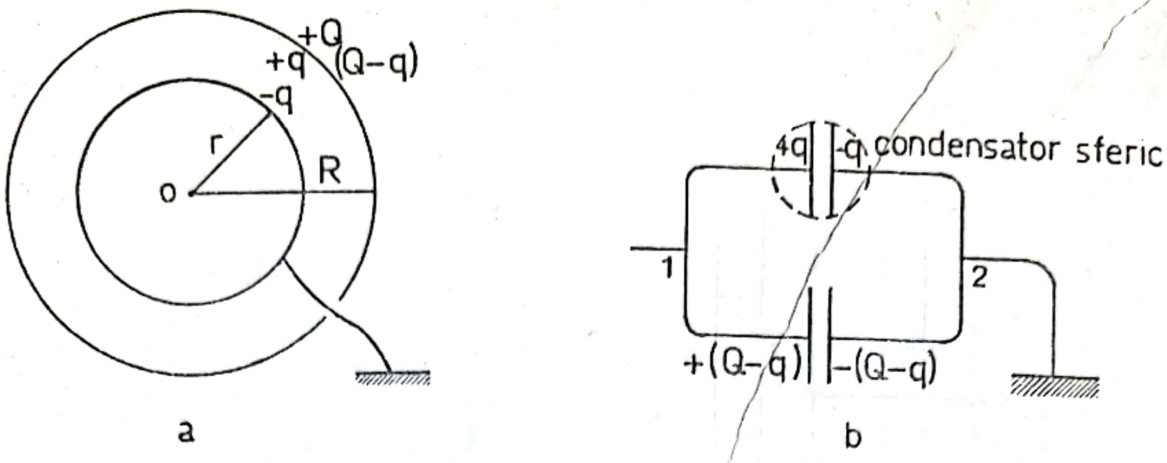


Fig. II.13, R.

Potențialul sferei goale exterioare va fi deci:

$$V = V' + V'' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}(Q - q). \tag{1}$$

Potențialul sferei interioare este:

$$V_1 = V_1' + V_1'' = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} - \frac{q}{r}\right). \tag{2}$$

Sfera interioară fiind pusă la pământ potențialul ei este nul, așadar:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} - \frac{q}{r}\right) = 0 \text{ de unde } q = \frac{r}{R}Q. \tag{3}$$

Înlocuind pe (3) în (1) obținem pentru potențialul sferei goale exteri oare:

$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(R-r)}{R^2}$, deci pentru valorile date în problemă $V = 225$ V.

Dacă am considera sistemul dat ca un singur conductor de potențial V, calculat anterior, și sarcină Q, capacitatea lui va fi dată de relația:

$$C = \frac{Q}{V} \text{ unde } V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q(R-r)}{R^2}, \text{ deci } C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^2}{R-r}. \tag{4}$$

Făcînd înlocuirile obținem: $C = \frac{1\cdot 4\cdot 10^{-2}}{9\cdot 10^9\cdot 10^{-1}} = 0{,}44\cdot 10^{-10}$ F. (4')

Sistemul dat poate fi foarte bine echivalat cu un ansamblu de două condensatoare legate în paralel. Unul dintre condensatoare este format din sfera interioară și suprafața interioară a sferei mari; celălalt condensator este format din suprafața exterioară a sferei mari și pământ. Schema corespunzătoare ar fi cea din figura II.13, *b*, *R*.

Capacitatea echivalentă sistemului din figura menționată este:

$$C = C_1 + C_2.$$

Primul condensator fiind unul sferic are capacitatea $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{Rr}{R-r}$, iar al doilea, cu armăturile suprafața exterioară a sferei goale și pământul, are capacitatea $C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R$ (deoarece cea de-a doua armătură, pământul, poate fi considerată ca o sferă de rază infinit).

Rezultă că: $C = C_1 + C_2 = 4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{Rr}{R-r} + R\right) = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{R-r}$ ceea ce dă prin înlocuire cu date numerice $C = 44\text{pF}$.

Problema 4. Spre oglindă se îndreaptă un fascicul cilindric de lumină de rază $2a$; în acest caz reflectatele nu se intersectează într-un singur punct.

Totuși, pe segmentul luminos de pe axa principală, ce corespunde aberației longitudinale, putem distinge un punct F ce se bucură de proprietatea:

$$OF = FC = \frac{R}{2}.$$

În cele ce urmează va trebui să determinăm raza $x = EF$ a receptorului de radiații în funcție de R și a (fig. II.14, R). Vom porni de la triunghiul BEF unde: $x = BF \cdot \operatorname{tg} 2i$. (1)

Din figură se vede că:

$BF = BC - FC$ unde $BC = \frac{R}{2\cos i}$ și $FC = \frac{R}{2}$, așadar:

$$BF = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos i} - 1\right). \tag{2}$$

Înlocuind pe (2) în (1) obținem:

$$x = \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos i} - 1\right)\operatorname{tg} 2i. \tag{3}$$

Vom exprima, în continuare, pe $\cos i$ și $\operatorname{tg} i$ în funcție de a și R. Din triunghiul DAC:

$$\sin i = \frac{AD}{DC} = \frac{a}{R} \tag{4}$$

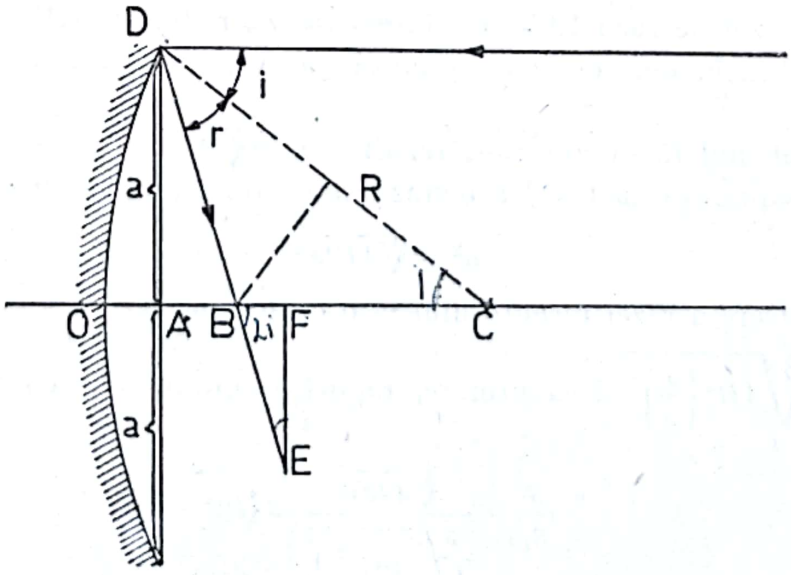


Fig. II.14, R.

și ținînd seama de faptul că $\sin^2 i + \cos^2 i = 1$, rezultă

$$\cos i = \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}; \tag{5}$$

$$\operatorname{tg} 2i = \frac{\sin 2i}{\cos 2i} = \frac{2 \sin i \cos i}{1 - 2\sin^2 i} = \frac{2\frac{a}{R}\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}}{1 - 2\frac{a^2}{R^2}} = \frac{2a\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}}{R\left(1 - 2\frac{a^2}{R^2}\right)}. \tag{6}$$

Înlocuind în (3) expresiile lui $\cos i$ și $\operatorname{tg} 2i$ din (5) și (6) se obține :

$$x = a\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}} - 1\right)\frac{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}}{1 - \frac{2a^2}{R^2}};$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}} \cdot \frac{a\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}}{1 - \frac{2a^2}{R^2}} = \frac{a\left(1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}\right)}{1 - \frac{2a^2}{R^2}}.$$

Făcîndu-se uz de aproximația $\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} \approx 1 - \frac{a^2}{2R^2}$ rezultă : $x = \frac{a \cdot \frac{a^2}{2R^2}}{1 - \frac{2a^2}{R^2}}$.

Cum $\frac{a^2}{R^2} \ll 1$, $1 - \frac{2a^2}{R^2} \approx 1$ avem $x \approx \frac{a^3}{2R^2}$ și făcînd înlocuirile cu datele numerice vom obține pentru raza receptorului valoarea :

$$x \approx \frac{(25 \cdot 10^{-2})^3}{8}\ \text{m} = \frac{25^3 \cdot 10^{-6}}{8}\ \text{m} = 1\,953 \cdot 10^{-6}\ \text{m} = 1{,}95\ \text{mm}.$$

Receptorul de rază 1,95 mm înregistrează radiațiile reflectate de toată suprafața oglinzii, deci energia radiantă va străbate suprafața circulară de rază a.

Din calculul făcut anterior, rezultă : $a = \sqrt[3]{2R^2x}$.

Cum suprafața „activă“ a oglinzii este proporțională cu a^2, vom scrie :

$$a^2 = \sqrt[3]{4R^4x^2}.$$

O reducere a razei receptorului la o optime ne dă :

$a_1^2 = \sqrt[3]{4R^4\left(\frac{x}{8}\right)^2}$ și ca urmare, raportul suprafețelor va fi:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{\sqrt[3]{4R^4x^2}}{\sqrt[3]{4R^4\left(\frac{x}{8}\right)^2}} = \sqrt[3]{8^2} = 4.$$

Deci radiația înregistrată de receptor se micșorează de 4 ori cînd raza receptorului se reduce la o optime.

Lucrarea experimentală. Trebuie determinate prin două procedee distanțele focale ale unei lentile divergente și a două lentile convergente.

Unul din procedee se bazează pe obținerea unei imagini virtuale, iar al doilea pe obținerea unei imagini reale.

Determinarea distanței focale a unei lentile convergente:

a) Primul procedeu. Se așază lentila suficient de aproape de ecran în așa fel încît să se observe imaginea virtuală a figurii de pe ecran (fig. II. 15, *R*).

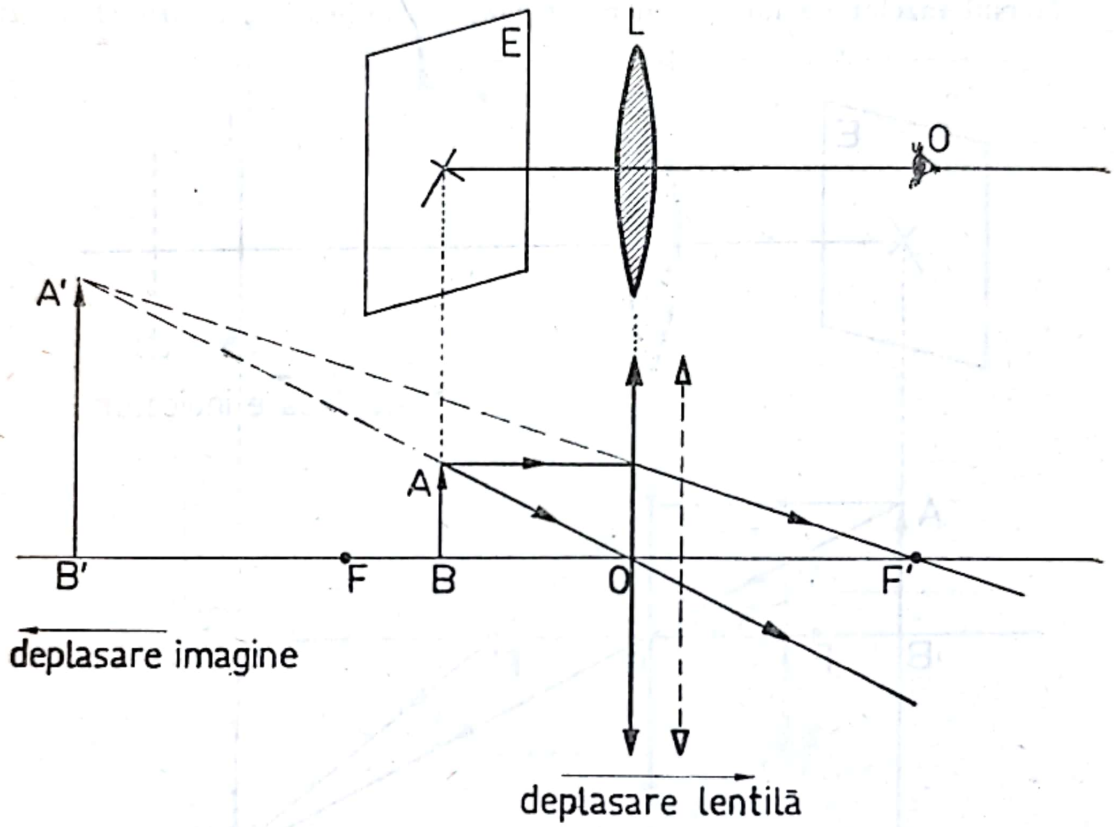


Fig. II.15, R.

Se deplasează încet lentila spre observator pînă cînd dispare imaginea virtuală (pînă cînd devine fluă). În acest moment distanța dintre lentilă și ecran este aproximativ egală cu distanța focală a lentilei. Se repetă experiența de mai multe ori pentru a determina o valoare medie a distanței focale. Mersul razelor de lumină în cazul studiat este arătat în figura II.15, *R*. Din figură se vede că prin depărtarea lentilei de ecran deci de obiectul *AB* (ceea ce este echivalent cu apropierea lentilei de observator) imaginea se depărtează devenind din ce în ce mai mare pînă cînd, atunci cînd $p = f$, imaginea este aruncată la infinit.

b) Procedeul al doilea. Se așază lentila la o astfel de distanță de ecran încît să se poată obține o imagine reală a figurii de pe ecran. Observatorul vede această imagine înaintea lentilei. Cu bună aproximație, poziția imaginii se poate afla prin metoda paralaxei, cu ajutorul firului vertical (indicator) pe

Scanned with OKEN Scanner

stativ. După ce s-a obținut imaginea reală a figurii se deplasează încet indicatorul, în direcția benzii divizate, urmărind, la fiecare poziție a indicatorului, printr-o mișcare la stînga și la dreapta a capului, deplasarea relativă a indicatorului față de imagine. În momentul cînd indicatorul rămîne nemișcat față de imagine, se măsoară distanțele : p' — distanța de la indicator la lentilă și p — distanța de la lentilă la ecran (obiect) (fig. II.16, *R*). Distanța focală se calculează din relația :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \text{ sau } f = \frac{pp'}{p + p'}.$$

Se vor efectua mai multe măsurători pentru diferite poziții ale aparatelor. Mersul razelor de lumină în acest caz este indicat de figura II.16, *R*.

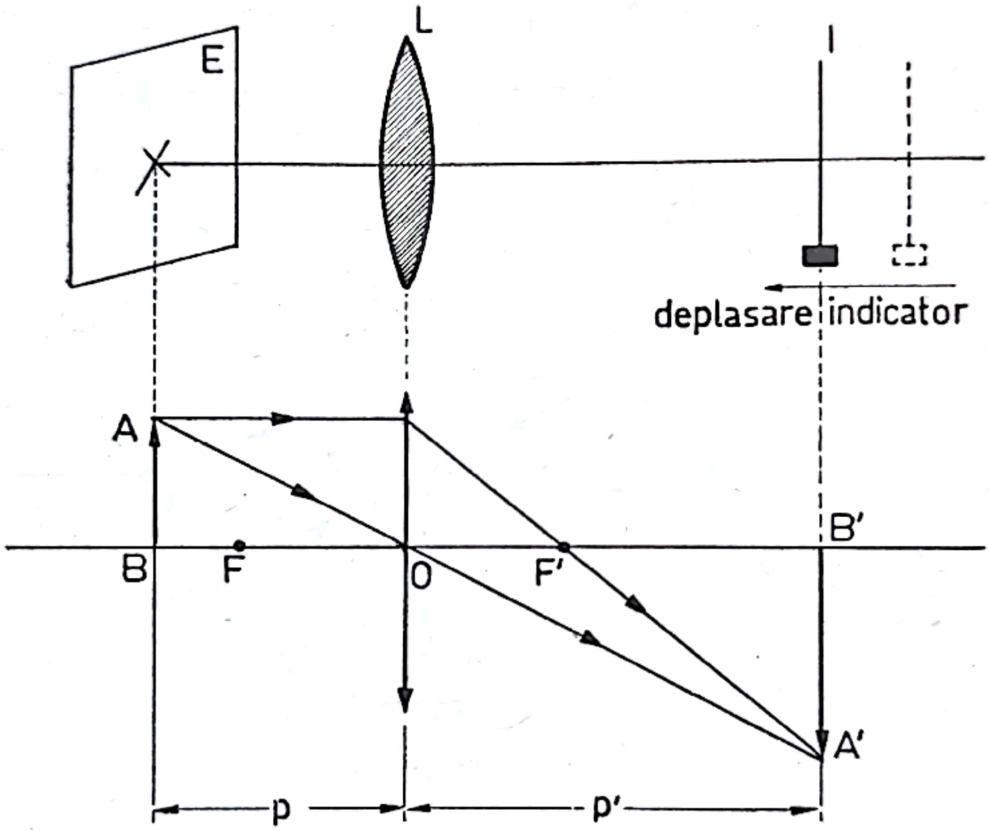


Fig. II.16, R.

Determinarea distanței focale a unei lentile divergente.

Cu lentila divergentă se pot obține imagini ale unor obiecte reale sau virtuale. Imaginea reală $A'B'$, dată de o lentilă convergentă poate servi drept obiect pentru o lentilă divergentă. Există două posibilități : *a*) imaginea obiectului virtual în lentila divergentă să fie o imagine virtuală, *b*) imaginea obiectului virtual în lentila divergentă să fie o imagine reală.

În procedeele experimentale vom lua în considerare ambele posibilități.

a) *Primul procedeu*

Dispunerea aparatelor se face după schema din figura II.17, *R*. Se așază lentila convergentă la o distanță determinată de ecranul — obiect ; se obține o imagine reală $A'B'$, a cărei poziție în raport cu lentila se poate afla prin me-

Scanned with OKEN Scanner

toda paralaxei (fig. II.17, *R* poziția I_1 a indicatorului). Se așază apoi lentila divergentă la stînga lui $A'B'$, astfel ca imaginea definitivă $A''B''$ să fie virtuală. Ea poate fi observată prin lentila divergentă privind din dreapta ei. Poziția acestei imagini poate fi determinată tot prin metoda paralaxei (fig. II.17, *R*, poziția I_2 a indicatorului). Cunoscînd deci pe p și p' (distanța de la obiectul virtual la lentila divergentă și, respectiv, distanța de la imaginea virtuală la lentila divergentă) se poate deduce distanța focală a lentilei divergente.

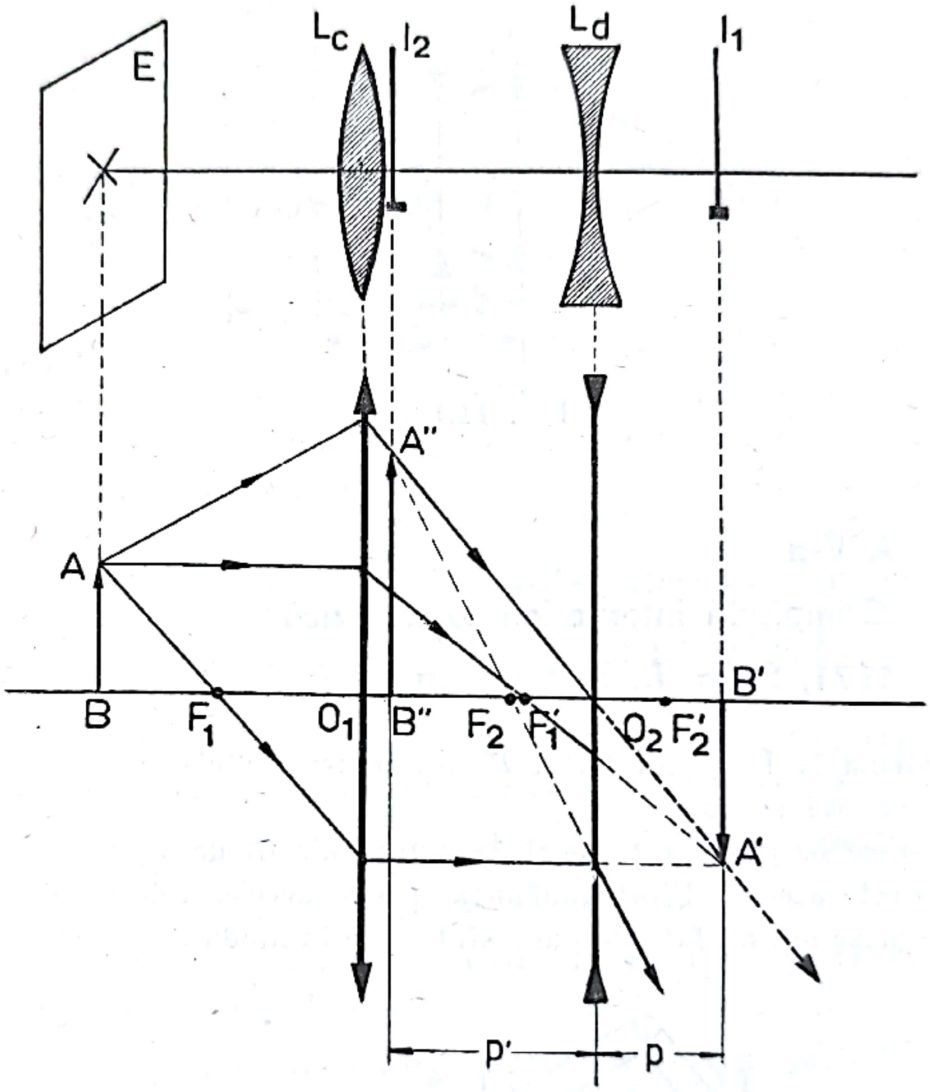


Fig. II.17, R.

b) *Al doilea procedeu.* Dispunerea aparatelor se face după schemă din figura II.18, *R*.

Fie A' poziția imaginii date de lentila convergentă (fig. II.18, *R*). Se așază lentila divergentă în dreapta celei convergente în așa fel încît imaginea definitivă A'' dată de sistem să fie reală. Pozițiile celor două imagini A' și A'' față de lentila divergentă se determină prin metoda paralaxei. Fie b distanța de la lentila divergentă la imaginea reală și d distanța dintre lentile. Distanța focală a lentilei divergente poate fi calculată imediat din relația:

$$-\frac{1}{a-d}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \text{ de unde } f=-\frac{b\,(d-a)}{d-a+b}.$$

Scanned with OKEN Scanner

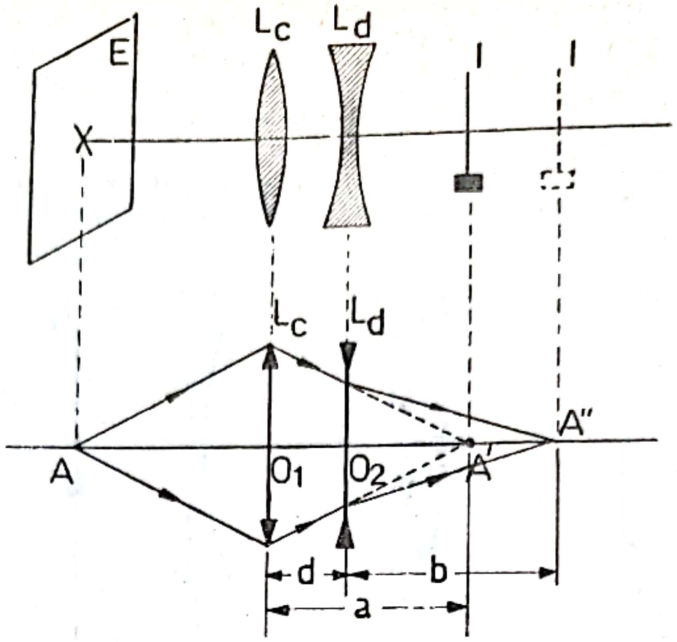


Fig. 11.18, R.

A V-a

Olimpiadă internațională de fizică

1971, Sofia, R. P. Bulgaria

Problema 1. În figura II.19, *R* sînt reprezentate forțele care lucrează asupra celor trei corpuri.

Deoarece scriptele este ideal, tensiunea din fir de o parte și de alta a scripetelui este aceeași. Firul fiind inextensibil, accelerațiile relative ale corpurilor de mase m_1, m_2 față de pană sînt egale în modul.

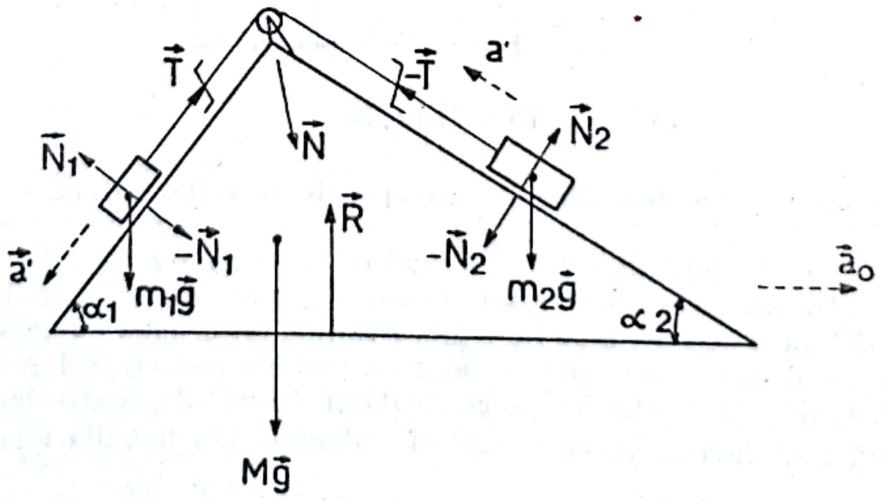


Fig. II.19, R.

Scanned with OKEN Scanner

Acceleraţia absolută a corpului de masă m_1 (sau m_2) se compune vectorial din acceleraţia relativă a acestui corp faţă de pană şi acceleraţia absolută a panei.

Să scriem ecuaţia fundamentală pentru cele două corpuri de mase m_1, m_2, pe direcţiile paralelă şi perpendiculară faţă de planul înclinat:

$$(m_1)\begin{cases} m_1 g\sin\alpha_1 - T = m_1(a' - a_0\cos\alpha_1), \\ N_1 - m_1 g\cos\alpha_1 = -m_1 a_0\sin\alpha_1; \end{cases}$$
$$(m_2)\begin{cases} T - m_2 g\sin\alpha_2 = m_2(a' - a_0\cos\alpha_2), \\ N_2 - m_2 g\cos\alpha_2 = m_2 a_0\sin\alpha_2. \end{cases} \quad (1)$$

Ţinînd seama că apăsarea $\vec{N}$ a scripetelui asupra penei se compune vectorial din cele două tensiuni ale firului de o parte şi alta a scripetelui, putem scrie ecuaţia fundamentală pentru pană, pe direcţia orizontală şi pe cea verticală:

$$(M)\begin{cases} N_1\sin\alpha_1 - N_2\sin\alpha_2 + T(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) = Ma_0, \\ R - Mg - N_1\cos\alpha_1 - N_2\cos\alpha_2 - T(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Adunînd membru cu membru prima şi a treia ecuaţie din (1), se elimină tensiunea T şi putem exprima acceleraţia relativă a' a corpurilor prin acceleraţia a_0 a panei:

$$g(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2) = (m_1 + m_2)a' - a_0(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2),$$
$$a' = \frac{g(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2) + a_0(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2)}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

Pentru a afla acceleraţia panei înmulţim ecuaţia a doua (1) cu $\sin\alpha_1$ şi ecuaţia a patra (1) cu $\sin\alpha_2$ şi le scădem membru cu membru:

$$-N_1\sin\alpha_1 + N_2\sin\alpha_2 + g(m_1\sin\alpha_1\cos\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2\cos\alpha_2) =$$
$$= a_0(m_1\sin^2\alpha_1 + m_2\sin^2\alpha_2). \quad (4)$$

Înmulţim prima ecuaţie (1) cu $\cos\alpha_1$ şi a treia ecuaţie (1) cu $\cos\alpha_2$ şi le adunăm membru cu membru:

$$T(-\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) + g(m_1\sin\alpha_1\cos\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2\cos\alpha_2) =$$
$$= a'(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2) - a_0(m_1\cos^2\alpha_1 + m_2\cos^2\alpha_2). \quad (5)$$

Scăzînd ecuaţiile (4—5) între ele membru cu membru, obţinem

$$N_2\sin\alpha_2 - N_1\sin\alpha_1 - T(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) = a_0(m_1 + m_2) - a'(m_1\cos\alpha_1 +$$
$$+ m_2\cos\alpha_2). \quad (6)$$

Adunînd ecuaţia (6) cu prima ecuaţie (2), membru cu membru, obţinem

$$0 = a_0(m_1 + m_2) - a'(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2) + Ma_0. \quad (7)$$

Înlocuind aici pe a' (3) găsim acceleraţia a_0 cerută:

$$a_0 = g\,\frac{(m_1\sin\alpha_1 - m_2\sin\alpha_2)(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2)}{(m_1 + m_2 + M)(m_1 + m_2) - (m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2)^2}. \quad (8)$$

Scanned with OKEN Scanner

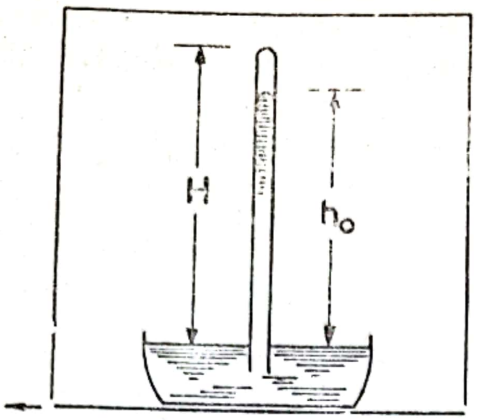


Fig. II.20, R.

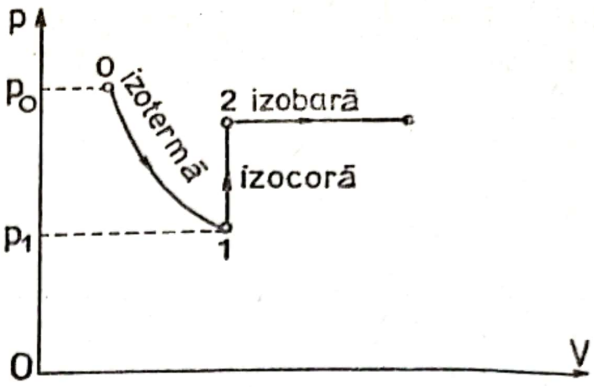


Fig. II.21, R.

Punînd condiția ca pana să rămînă în repaus, $a_0 = 0$, obținem :

$$m_1 \sin\alpha_1 = m_2 \sin\alpha_2. \tag{9}$$

Dar atunci și $a' = 0$ din (3), astfel încît și corpurile de mase m_1, m_2 vor rămîne în repaus pe pană (sau în mișcare uniformă).

Problema 2. În figura II.20, R este reprezentat sistemul în starea inițială.

Transformările pe care le suferă aerul din vas sînt reprezentate în figura II.21, R în diagrama p—V.

Vom nota cu accent (′) toate mărimile care se referă la hidrogenul conținut în tub.

Pentru transformarea izotermă $0 \to 1$ a hidrogenului avem legea Boyle-Mariotte :

$$(p_0 - \rho_0 g h_0)(H - h_0) = (p_1 - \rho_0 g h_1)(H - h_1), \tag{1}$$

de unde obținem înălțimea H :

$$H = \frac{h_0 p_0 - h_1 p_1 - \rho_0 g (h_0^2 - h_1^2)}{p_0 - p_1 - \rho_0 g (h_0 - h_1)}.$$

$$H = [(0{,}700 \cdot 1{,}334 \cdot 10^5 - 0{,}400 \cdot 8{,}00 \cdot 10^4)\ \mathrm{N/m} - 13{,}6 \cdot 10^3 (\mathrm{kg/m^3}) 9{,}8 (\mathrm{m/s^2}) \cdot$$
$$1{,}100 \cdot 0{,}300\ \mathrm{m^2}] : [(1{,}334 \cdot 10^5 - 8{,}00 \cdot 10^4)\mathrm{N/m^2} - 133{,}3 \cdot 10^3 (\mathrm{N/m^3}) 0{,}300\ \mathrm{m}] =$$
$$= \frac{174 \cdot 10^3\ \mathrm{N/m}}{134 \cdot 10^3\ \mathrm{N/m^2}} = 1{,}300\ \mathrm{m}. \tag{2}$$

Masa hidrogenului m' se obține din ecuația de stare :

$$m' = \frac{\mu'}{RT_0}(p_0 - \rho_0 g h_0)(H - h_0) S, \tag{3}$$

unde H este dat de ecuația (2).

$$m' = \frac{2{,}0\ \mathrm{kg/kmol}}{8{,}3 \cdot 10^3 (\mathrm{J/kmol \cdot K}) 273\ \mathrm{K}} [1{,}334 . 10^5 \mathrm{N/m^2} -$$
$$- 133{,}3 \cdot 10^3 (\mathrm{N/m^3}) 0{,}700\ \mathrm{m}](1{,}300 -$$
$$- 0{,}700)\ \mathrm{m} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-4} \mathrm{m^2} = 2{,}12\ \mathrm{mg}. \tag{3'}$$

Scanned with OKEN Scanner

În transformarea $1 \to 2$ hidrogenul suferă o transformare generală:

$$\frac{(p_1 - \rho_0 g h_1)(H - h_1)}{T_0} = \frac{(p_2 - \rho_2 g h_2)(H - h_2)}{T_2}, \tag{4}$$

unde $$\rho_2 = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T_2 - T_0)} \cong \rho_0[1 - \beta(T_2 - T_0)]. \tag{5}$$

Aerul din vas suferă o transformare izocoră $1 \to 2$:

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_0}. \tag{6}$$

Din ecuațiile (4—6) obținem temperatura T_2:

$$T_2 = T_0 \rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0) : \left[p_1 - \frac{H - h_1}{H - h_2}(p_1 - \rho_0 g h_1) + \rho_0 g h_2 \beta T_0 \right], \tag{7}$$

$$T_2 = 273\ \text{K}\ 133{,}3 \cdot 10^3 (\text{N/m}^3) 0{,}500\ \text{m}(1 + 1{,}8 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}\ 273\ \text{K}) :$$

$$: \left[8{,}00 \cdot 10^4 \text{N/m}^2 - \frac{0{,}9}{0{,}8} (8{,}00 \cdot 10^4\ \text{N/m}^2 - 133{,}3 \cdot 10^3 (\text{N/m}^3) 0{,}400 + \right.$$

$$\left. + 133{,}3 \cdot 10^3 (\text{N/m}^3) 0{,}500\ \text{m} \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}\ 273\ \text{K} \right] =$$

$$= 273\ \text{K}\ \frac{70 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^3 - 30 \cdot 10^3 + 3{,}3 \cdot 10^3} = 359\ \text{K} = 86^\circ\text{C}$$

și presiunea

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_0} = 8{,}00 \cdot 10^4 (\text{N/m}^2) \frac{359}{273} = 10{,}5 \cdot 10^4\ \text{N/m}^2. \tag{8}$$

Presiunea hidrogenului în starea finală:

$$p' = p_2 - \rho g h = p_2 - \rho_0 g h[1 - \beta(T - T_0)]. \tag{9}$$

Pentru a afla temperatura finală T scriem ecuația transformării generale a hidrogenului din tub

$$\frac{(p_2 - \rho_2 g h_2)(H - h_2)}{T_2} = \frac{p'(H - h)}{T}, \tag{10}$$

unde densitatea ρ_2 este dată de (5), iar p' de (9), de aceea (10) devine:

$$T\{p_2 - \rho_0 g h_2[1 - \beta(T_2 - T_0)]\}(H - h_2) =$$

$$= T_2\{p_2 - \rho_0 g h[1 - \beta(T - T_0)]\}(H - h). \tag{11}$$

Din (11) rezultă temperatura T:

$$T = T_2 \frac{p_2 - \rho_0 g h(1 + \beta T_0)}{\{p_2 - \rho_0 g h_2[1 - \beta(T_2 - T_0)]\}(H - h_2) - T_2 \beta \rho_0 g h} \tag{12}$$

$$= 359\ \text{K}\ [10{,}5 \cdot 10^4\ \text{N/m}^2 - 133{,}3 \cdot 10^3 (\text{N/m}^3) 0{,}450\ \text{m} \cdot 1{,}049] :$$

$$:\{[10{,}5 \cdot 10^4\ \text{N/m}^2 - 133{,}3 \cdot 10^3 (\text{N/m}^3) 0{,}500\ \text{m}\ 0{,}9845] 0{,}800\ \text{m} -$$

$$- 359\ \text{K}\ 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{K}^{-1}\ 133{,}3 \cdot 10^3\ (\text{N/m}^3) 0{,}450\ \text{m}\} =$$

$$= 359 \frac{4{,}2 \cdot 10^4}{2{,}762 \cdot 10^4\ \text{N/m}^2} = 546\ \text{K} = 273^\circ\text{C}.$$

Scanned with OKEN Scanner

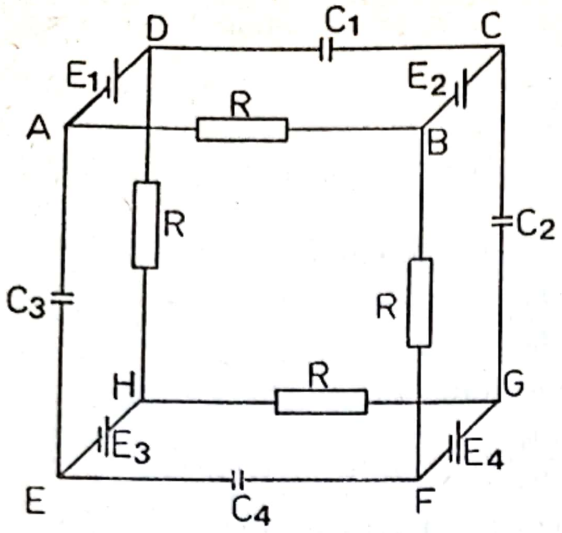


Fig. II.22, R.

Din (9) obținem presiunea cerută:

$$p' = p_2 - \rho_0 g h[1 - \beta(T - T_0)] =$$
$$= 10{,}5 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2 -$$
$$-133{,}3 \cdot 10^3 \text{ (N/m}^3\text{) } 0{,}450 \text{ m } 0{,}951 =$$
$$= 4{,}8 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2. \qquad (13)$$

Problema 3. Se consideră conturul prin care circulă curentul de intensitate I, $ADHGFBA$ (fig. II.22, R).

Din legea lui Ohm, rezultă:

$$I = \frac{E_4 - E_1}{4R}.$$

Prin convenție se consideră potențialul unuia dintre noduri egal cu zero; de exemplu, fie $V_E = 0$.

Se vor calcula potențialele tuturor nodurilor:

$$V_E = 0\,; \; V_H = V_E + E_3 = E_3\,;$$

$$V_D = V_H - IR = E_3 - \frac{E_4 - E_1}{4} = \frac{1}{4}(4E_3 - E_4 + E_1)\,;$$

$$V_A = V_D - E_1 = \frac{1}{4}(4E_3 - E_4 + E_1) - E_1 = \frac{1}{4}(4E_3 - E_4 - 3E_1)\,;$$

$$V_B = V_A - IR = \frac{1}{2}(2E_3 - E_4 - E_1)\,; \; V_C = V_B + E_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(2E_3 - E_4 - E_1 + 2E_2)\,;$$

$$V_F = V_B - IR = \frac{1}{4}(4E_3 - 3E_4 - E_1)\,; \; V_G = V_A + IR =$$

$$= \frac{1}{4}(4E_3 + E_4 - E_1).$$

Prin înlocuire cu date numerice se obține:

$$V_E = 0\text{V}\,; \; V_A = 5\text{V}\,; \; V_B = 1\text{V}\,; \; V_C = 10\text{V}\,; \; V_D = 9\text{V}\,;$$
$$V_F = -1\text{V}\,; \; V_G = -15\text{V}\,; \; V_H = 12\text{V}.$$

Energia necesară încărcării unuia dintre condensatoare, de exemplu C_4 va fi: $W_4 = \frac{1}{2} C_4 (V_E - V_F)^2$.

Energia necesară încărcării tuturor condensatoarelor va fi:

$$W = \frac{C_1}{2}[(V_E - V_F)^2 + (V_C - V_D)^2 + (V_A - V_E)^2 + (V_C - V_G)^2].$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seama de valorile potențialelor și capacităților avem :

$$W = 362 \cdot 10^{-6} J = 362\ \mu J.$$

După scurtcircuitarea punctelor H și B se obțin, pentru potențialele punctelor C și G, valorile :

$$V'_C = E_3 + E_2 = 20V\ ;\ V'_G = \frac{E_4}{2} + E_3 = 20V.$$

Cum : $Q_2 = C_2(V_C - V_G)$, rezultă : $Q_2 = 0$.

Problema 4. Pentru o deplasare mică a peștișorului se poate lucra în aproximație gaussiană.

Înlocuind oglinda plană cu imaginea simetrică B a peștișorului A față de planul acestei oglinzi, problema se reduce la aflarea raportului $\frac{S'}{S}$ (fig. II.23, R), unde S' este distanța dintre cele două raze emergente din sistemul dioptrilor δ_1 și δ_2 și paralele cu axa optică xx', iar S este deplasarea peștișorului.

Raza emergentă prin A' este paralelă cu axa optică dacă prelungirea razei AA' (din apă) trece prin focarul din stînga al dioptrului sferic δ_2.

Ținînd seama de formula distanței focale, în cazul dioptrului sferic, avem :

$$f = \frac{nR}{n-1} \text{ sau făcînd înlocuirile } f = \frac{4/3R}{4/3 - 1} = 4R.$$

Așadar focarul căutat se află chiar în punctul de intersecție al axei xx' cu planul oglinzii ; fie acest punct M.

Din asemănarea triunghiurilor MAa și $MA'a'$ rezultă :

$$A'a' = 2Aa = 2S. \qquad (1)$$

Obiectul virtual bB va da în ansamblul celor doi dioptrii sferici o imagine virtuală cuprinsă între axa principală și emergenta ce trece prin B''. Urmează a fi determinată această distanță. Raza emergentă în B'' este paralelă cu axa xx' dacă prelungirea lui $B'B''$ trece prin M (focarul dioptrului δ_2). Mersul razei de lumină ce pleacă din B și iese din sistemul optic în B'' va fi deci $BPB'B''$ (fig. II.23, R) unde P este intersecția lui BB' cu axa XX'. Considerînd punctul

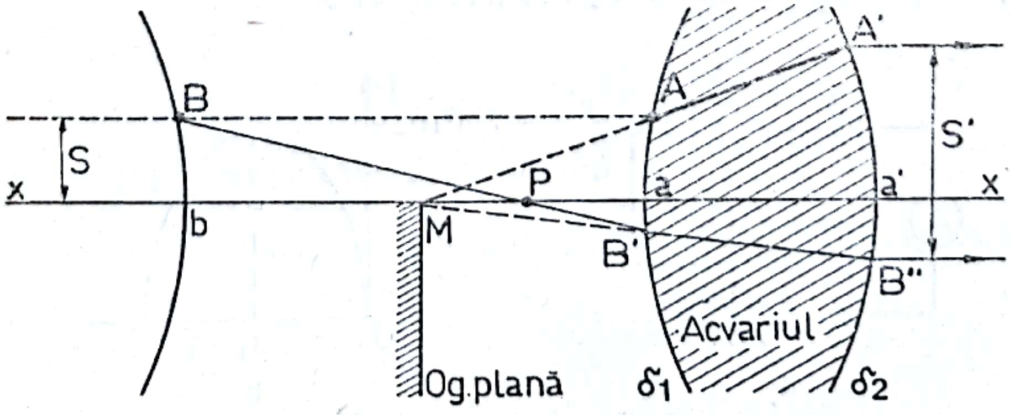


Fig. II.23, R.

P ca obiect pentru dioptrul δ_1 imaginea lui virtuală va fi chiar M. Să calculăm pe x, adică distanța de la punctul P la dioptrul δ_1 ; conform formulei dioptrului sferic vom avea :

$$\frac{n}{-2R} + \frac{1}{x} = \frac{n-1}{R} \text{ de unde : } x = \frac{3n-2}{2R} = R.$$

Vom putea afla acum pe $B'a$, respectiv pe $B''a'$.
Din asemănarea triunghiurilor BbP și PaB', obținem :

$$\frac{Bb}{3R} = \frac{aB'}{R} \text{ sau } aB' = \frac{Bb}{3}.$$

Din triunghiurile asemenea MaB' și $Ma'B''$, avem :

$\frac{a'B''}{aB'} = \frac{4R}{2R} = 2$, deci $a'B'' = 2aB'$, cum $aB' = \frac{1}{3} Bb$, urmează că :

$$a'B'' = \frac{2}{3} Bb = \frac{2}{3} S. \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă :

$$S' = A'B'' = A'a' + a'B'' = 2S + \frac{2}{3} S = \frac{8}{3} S \text{ deci } \frac{S'}{S} = \frac{8}{3}.$$

Mișcarea peștișorului fiind uniformă, deplasarea relativă a imaginilor una față de alta va fi tot uniformă, așadar :

$$\frac{S'}{S} = \frac{v'}{v} = \frac{8}{3} \text{ sau } v' = \frac{8}{3} v.$$

Prin urmare viteza relativă cu care se depărtează imaginile peștișorului una față de alta este $\frac{8}{3}$ din viteza lui de deplasare.

Lucrarea experimentală. Schema de montaj ce cuprinde sursa de curent, ampermetrul, voltmetrul, reostatul și conductoarele de conexiune este reprezentată în figura II.24, $R(a)$.

Se modifică treptat rezistența reostatului ; pentru fiecare valoare a lui R se va măsura tensiunea și intensitatea. (Aceste valori se vor trece într-un tabel.)

Produsul UI ne dă tocmai puterea utilă P. Reprezentînd grafic puterea utilă în funcție de I se obține o parabolă (fig. II.24, R, b).

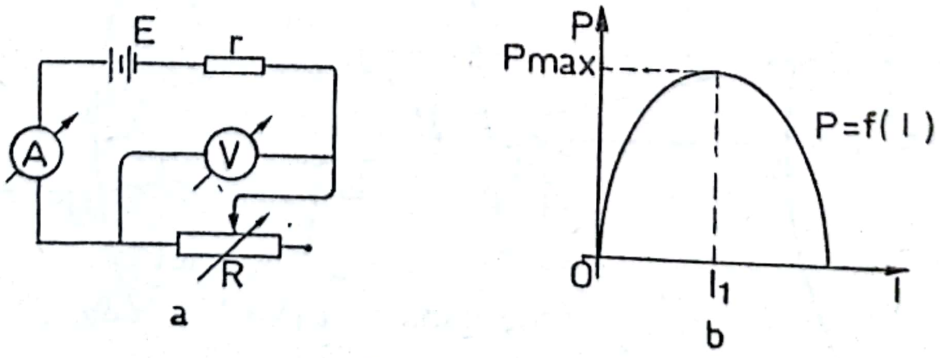


Fig. II.24, R.

Scanned with OKEN Scanner

Se poate arăta că, în cazul în care din grafic s-au determinat puterea utilă maximă și intensitatea corespunzătoare, aceste două mărimi sînt suficiente pentru determinarea tensiunii electromotoare și rezistenței interne a sursei de curent.

În cele ce urmează, vom apela la următoarele relații:

$$I = \frac{E}{r+R} \quad (1); \qquad U = IR \quad (2);$$

$$P = UI = \frac{E^2R}{(r+R)^2} = I^2R \quad (3); \qquad E = I(R+r) \quad (4)$$

$$P = EI - I^2r \quad (5); \qquad P_1(\text{totală}) = I^2R + I^2r \quad (6); \qquad \eta = \frac{P}{P_1}. \quad (7)$$

Pentru a afla valoarea puterii utile maxime se procedează astfel:

$$P'_I = \frac{dP}{dI} = E - 2rI, \quad E - 2rI = 0 \text{ de unde}$$

$$I_1 = \frac{E}{2r} \quad (8) \text{ iar } P_{max.} = \frac{E^2}{4r} \quad (9).$$

(În formula P_{max} se ține seama de faptul că $R = r$).

Din relațiile (8) și (9) se pot exprima mărimile necunoscute E și r prin valorile pentru P_{max} și I_1 obținute din grafic:

$$E = \frac{2P_{max}}{I_1} \quad (10) \quad \text{și} \quad r = \frac{P_{max}}{I_1^2}. \quad (11)$$

Dependența puterii utile de rezistența exterioară R se obține din ecuația (3). Se vor lua în considerare perechi de valori pentru U și I din tabelul întocmit inițial din care se obțin diferite valori pentru R.

Se întocmește astfel graficul $P = f(R)$.

Pentru dependența $P_1(\text{totale})$ în funcție de rezistența exterioară R se va recurge la relația (6). Se vor lua în considerare diferite perechi de valori I și R din tabel după care se trasează graficul $P_{1\ total} = f(R)$.

Randamentul sursei în funcție de rezistența exterioară se obține plecînd de la relația:

$$\eta = \frac{P}{P_1} = \frac{I^2R}{I^2(R+r)} = \frac{R}{R+r}.$$

Din diagramele $P = f(R)$ și $P'_1 = f(R)$ se vor extrage valorile lui P și P_1 corespunzătoare anumitor valori ale lui lui R. Cu aceste date se întocmește graficul cerut: $\eta = f(R)$.

A VI-a
Olimpiadă internațională de fizică
1972, București, R. S. România

Problema 1. Momentele de inerție ale celor trei cilindri sînt următoarele:

$$I_1 = \frac{1}{2}\rho_1\pi(R^4 - r^4)h, \quad I_2 = \frac{1}{2}\rho_2\pi R^4h = \frac{1}{2}mR^2,$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\rho_2\pi(R^4 - r^4)h. \quad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece masa lor este aceeași:

$$m = \rho_1\pi(R^2 - r^2)h = \rho_2\pi R^2 h, \tag{2}$$

de unde $r^2 = R^2(1 - \rho_2/\rho_1) = R^2(1 - 1/n)$, $n = \rho_1/\rho_2$. (3)

Ținînd seama de (3), putem scrie momentele de inerție astfel:

$$I_1 = I_2(2 - 1/n) > I_2, \quad I_3 = I_2(2 - 1/n)\,\frac{1}{n} = I_1/n. \tag{4}$$

În expresia momentului I_3 suma celor doi factori este constantă, $(2 - 1/n) + 1/n = 2$, independentă de n, de aceea produsul lor este maxim cînd acești factori sînt egali între ei: $2 - 1/n = 1/n$, de unde $n = 1$, pentru care produsul $(2 - 1/n)(1/n)$ devine egal cu 1. Dar în realitate $n > 1$, de aceea produsul va fi subunitar și deci $I_3 < I_2$. Avem astfel,

$$I_1 > I_2 > I_3. \tag{5}$$

Pentru un cilindru care se rostogolește liber în jos pe un plan înclinat (fig. II.25, R) avem ecuațiile:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_f = ma, \\ N - mg\cos\alpha = 0, \end{cases} \tag{6}$$

$$F_f R = I\varepsilon, \tag{7}$$

unde ε este accelerația unghiulară. Dacă cilindrul nu lunecă avem condiția:

$$a = \varepsilon R. \tag{8}$$

Rezolvînd sistemul (6—8) găsim:

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + I/mR^2}, \quad F_f = \frac{mg\sin\alpha}{1 + mR^2/I}. \tag{9}$$

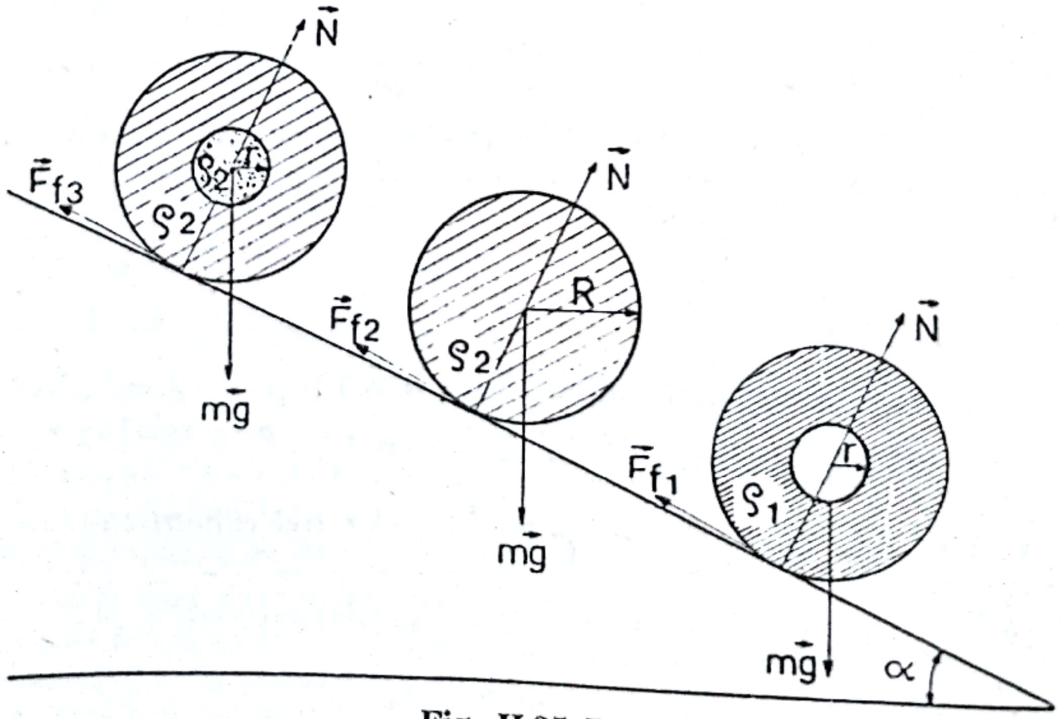


Fig. II.25, R.

Scanned with OKEN Scanner

Condiția de nealunecare este

$$F_f < \mu N = \mu mg\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\alpha < \mu(1 + mR^2/I). \tag{10}$$

În cazul cilindrilor din problemă, condiția ca niciunul din cilindri să nu lunece se obține pentru I maxim, adică

$$\operatorname{tg}\alpha < \mu(1 + mR^2/I_1) = \mu\frac{4n-1}{2n-1}. \tag{11}$$

Accelerațiile cilindrilor sînt următoarele:

$$a_1 = \frac{2g\sin\alpha}{3 + (1 - 1/n)}, \quad a_2 = \frac{2g\sin\alpha}{3}, \quad a_3 = \frac{2g\sin\alpha}{3 - (1 - 1/n)^2}. \tag{12}$$

Se vede că

$$a_1 < a_2 < a_3. \tag{13}$$

În cazul lunecării tuturor cilindrilor:

$$F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha \tag{14}$$

și din (7) rezultă

$$\varepsilon = \frac{R}{I}\mu mg\cos\alpha. \tag{15}$$

În cazul cilindrilor din problemă avem:

$$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = \frac{1}{I_1} : \frac{1}{I_2} : \frac{1}{I_3} = 1 : (2 - 1/n) : n;$$

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3. \tag{16}$$

În cazul lunecării unui cilindru:

$$mg\sin\alpha - F_f = ma, \qquad F_f = \mu mg\cos\alpha, \tag{17}$$

de unde

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha). \tag{18}$$

Notînd cu $\vec{\mathcal{F}}$ forța rezultantă care acționează asupra masei de lichid m_l din partea cilindrului, scriem ecuația fundamentală pe cele două direcții (fig. II.26, R):

$$\mathcal{F}_x + m_l g\sin\alpha = m_l a = m_l g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

$$\mathcal{F}_y - m_l g\cos\alpha = 0, \tag{19}$$

de unde

$$\mathcal{F} = \sqrt{\mathcal{F}_x^2 + \mathcal{F}_y^2} = m_l g\cos\alpha\cdot\sqrt{1 + \mu^2} = m_l g\frac{\cos\alpha}{\cos\varphi}, \tag{20}$$

unde φ este unghiul de frecare ($\operatorname{tg}\varphi = \mu$).

Problema 2. *a*) Considerăm argonul gaz ideal (monoatomic) și ciocnirile atomilor cu pistonul perfect elastice.

Într-o ciocnire perfect elastică cu un perete fix viteza $\vec{v}$ a particulei incidente se schimbă doar ca direcție, astfel încît viteza $\vec{v}$ și viteza $\vec{v}'$, după cioc-

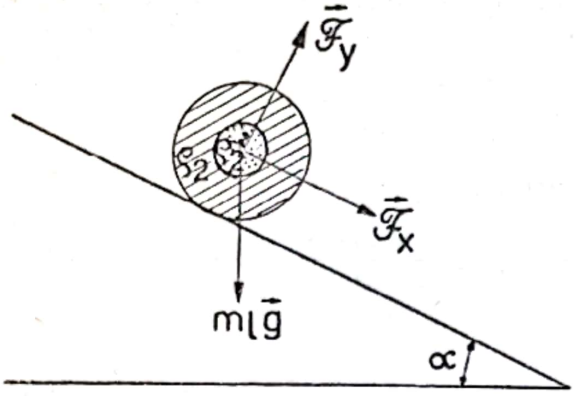


Fig. II.26, R.

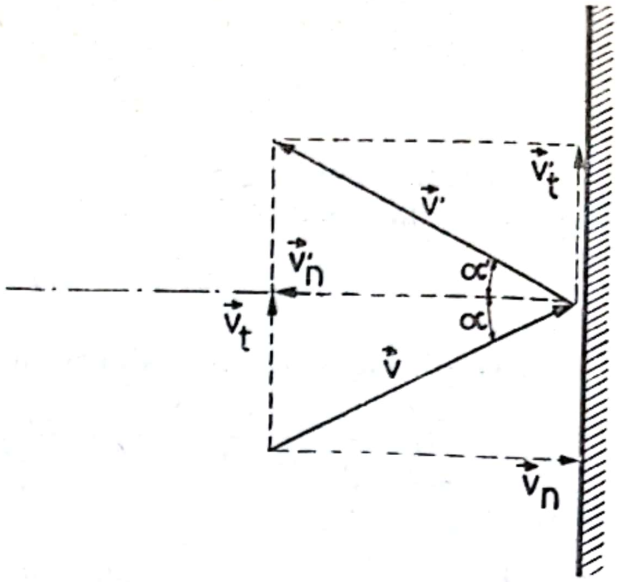


Fig. II.27, R.

nire se află în același plan cu normala la perete și unghiul de incidență este egal cu unghiul de reflexie (fig. II.27, *R*). Aceasta înseamnă că componenta normală la perete a vitezei incidente își schimbă sensul printr-o ciocnire perfect elastică, iar componenta tangențială nu se schimbă:

$$v'_n = -v_n, \qquad v'_t = v_t. \tag{1}$$

În cazul problemei date peretele se mișcă cu viteza $\vec{u}$ perpendiculară pe perete. Viteza relativă a particulei față de perete este $\vec{v} - \vec{u}$. Alegînd axa Oz perpendiculară pe perete în sensul vitezei $\vec{u}$, avem condițiile reflexiei perfect elastice:

$$(\vec{v} - \vec{u})_z = -(\vec{v}' - \vec{u})_z, \quad (\vec{v} - \vec{u})_{x,y} = (\vec{v}' - \vec{u})_{x,y};$$

$$v_z - u = -(v'_z - u), \; v'_z = 2u - v_z, \; v'_{x,y} = v_{x,y}. \tag{2}$$

Creșterea energiei cinetice a particulei (de masă m_0) în urma ciocnirii peretelui mobil este deci:

$$\frac{1}{2} m_0 v'^2 - \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} m_0 (v'^2_z - v^2_z) =$$

$$= 2m_0 u(u - v_z) \cong -2m_0 u v_z, \tag{3}$$

unde am neglijat u față de v_z, deoarece $u \ll v_z$.

Dacă notăm cu n_k concentrația moleculelor care au componenta v_{zk} a vitezei, atunci numărul moleculelor care au această componentă și lovesc într-un timp dt un element de arie dS al pistonului va fi

$$\frac{1}{2} n_k v_{zk} dt dS \tag{4}$$

unde coeficientul 1/2 apare din cauza că în medie statistică numai jumătate din molecule se mișcă spre perete ($v_z > 0$) și jumătate în sensul opus.

Scanned with OKEN Scanner

Prin însăşi definiţia ciocnirii perfect elastice, starea internă, deci energia de rotaţie şi vibraţie, a moleculelor nu se schimbă prin ciocnire. La gazele monoatomice, cum este argonul, problema rotaţiei sau vibraţiei atomilor nici nu se pune (în condiţii obişnuite).

Moleculele (4) vor suferi o variaţie a energiei cinetice:

$$\frac{1}{2} n_k v_{zk} \mathrm{d}t \mathrm{d}S \cdot (-2m_0 u v_{zk}) = -m_0 n_k v_{zk}^2 \mathrm{d}V, \tag{5}$$

unde $\mathrm{d}V = u\mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}S$ este creşterea de volum a gazului.

Însumînd contribuţiile tuturor moleculelor (de diferite viteze), care vin *spre* perete, obţinem variaţia energiei cinetice a gazului la o variaţie $\mathrm{d}V$ a volumului:

$$\mathrm{d}_{E_c} = -m_0 \mathrm{d}V \sum_k n_k v_{zk}^2. \tag{6}$$

Prin definiţia valorilor medii:

$$\overline{v_z^2} = \sum n_k v_{zk}^2 : \sum n_k = \frac{1}{n} \sum v_{zk}^2, \tag{7}$$

unde n este concentraţia moleculelor (numărul moleculelor din unitatea de volum): $n = N/V$, N — numărul total de molecule.

Datorită izotropiei mişcărilor moleculare, avem:

$$\begin{gathered} \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}, \\ \overline{v^2} = \overline{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_z^2}, \\ \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}, \end{gathered} \tag{8}$$

$\left(\sqrt{\overline{v^2}}\right.$ este viteza pătratică medie$\left.\right)$,

astfel încît,

$$\mathrm{d}E_c = -\frac{1}{3} n m_0 \overline{v^2} \mathrm{d}V. \tag{9}$$

Cum energia internă a gazului ideal monoatomic este formată numai din energia cinetică de translaţie a moleculelor, avem

$$\mathrm{d}U = -\frac{2}{3} N \frac{m_0 \overline{v^2}}{2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{2}{3} U \frac{\mathrm{d}V}{V},$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{U} = -\frac{2}{3} \frac{\mathrm{d}V}{V}. \tag{10}$$

Prin integrare obţinem

$$UV^{2/3} = \text{const}. \tag{11}$$

Cum energia internă a gazului ideal (monoatomic) este proporţională cu temperatura absolută (în general *la gazele caloric ideale energia internă este funcţie numai de temperatură* — legea lui Joule), rezultă ecuaţia transformării adiabatice a unui gaz monoatomic:

$$TV^{2/3} = \text{const}. \tag{12}$$

b) În cazul problemei noastre, oxigenul, fiind în contact cu un termostat, suferă o transformare izotermă. Cum *energia internă a gazului ideal depinde numai de temperatură*, rezultă că într-o transformare izotermă ($T =$

Scanned with OKEN Scanner

= const.) energia internă nu se schimbă. Prin urmare, energia internă a sistemului se schimbă numai prin destinderea adiabatică a argonului.

Variația energiei interne a unui gaz ideal este dată de formula

$$\Delta U = \nu C_v \Delta T = \frac{m}{\mu} C_v \Delta T = m c_v \Delta T, \tag{13}$$

unde ν este numărul de kmoli, μ — masa molară, m — masa gazului, C_z — căldura molară la volum constant, c_v — căldura specifică la volum constant. La gazele ideale monoatomice:

$$C_v = \frac{3}{2} R, \tag{14}$$

unde $R = 8314$ J/kmol·K este constanta gazelor.

Sistemul (argon + oxigen) schimbă cu mediul exterior numai căldură prin termostat, de aceea în virtutea legii I a termodinamicii:

$$Q = \Delta U + L, \tag{15}$$

punînd lucrul mecanic efectuat de sistem $L = 0$ (pentru întregul sistem), rezultă $\Delta U = Q$.

Notînd cu indicele 1 (respectiv 2) mărimile care se referă la argon din cilindrul A (respectiv la oxigen din cilindrul B) și adăugînd un accent la aceleași mărimi dacă se referă la starea finală, putem scrie:

$$\Delta U = \frac{m_1}{\mu_1} \frac{3}{2} R(T_1' - T_1) = Q,$$

$$\frac{m_1}{\mu_1} \frac{3}{2} R T_1 (T_1'/T_1 - 1) = Q$$

sau

$$\frac{m_1}{\mu_1} \frac{3}{2} R T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_1'} \right)^{2/3} - 1 \right] = Q, \tag{16}$$

de unde

$$T_1 = \frac{2}{3} \frac{\mu_1}{m_1} \frac{Q}{R} \frac{1}{(V_1/V_1')^{2/3} - 1} =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{40 \text{ kg/kmol}}{32 \text{ kg}} \cdot \frac{-747{,}9 \cdot 10^4 \text{ J}}{8\,314 \text{ J/kmol·K}} \frac{1}{1/4 - 1} = 1\,000 \text{ K}, \tag{17}$$

$$\frac{T_1'}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_1'} \right)^{2/3} = \frac{1}{4}, \quad T_1' = \frac{T_1}{4} = 250 \text{ K}. \tag{18}$$

Din transformarea izotermă a oxigenului rezultă

$$\frac{\rho_2'}{\rho_2} = \frac{p_2'}{p_2}, \quad p_2' = p_2 \frac{\rho_2'}{\rho_2} = 1{,}00 \text{ atm} \cdot 2 = 2{,}00 \text{ atm} = 2{,}026 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2. \tag{19}$$

Din condiția finală de echilibru:

$$p_1' = p_2' = 2{,}00 \text{ atm}. \tag{20}$$

Din ecuația de stare a argonului avem

$$\frac{p_1' V_1'}{p_1 V_1} = \frac{T_1'}{T_1}, \quad p_1 = p_1' \frac{V_1'}{V_1} \frac{T_1}{T_1'} = 2{,}00 \text{ atm} \cdot 8 \cdot 4 =$$

$$= 64{,}0 \text{ atm} = 64{,}9 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2; \tag{21}$$

Scanned with OKEN Scanner

$$V_1 = \frac{m_1}{\mu_1}\frac{RT_1}{p_1} = \frac{32\ \text{kg}}{40\ \text{kg/kmol}}\ \frac{8314(\text{J/kmol}\cdot\text{K})\cdot 100\ \text{K}}{64{,}0\cdot 1{,}013\cdot 10^5\ \text{N/m}^2} = 1{,}02\ \text{m}^3; \qquad (22)$$

$$V_1' = 8\ V_1 = 8{,}16\ \text{m}^3. \qquad (23)$$

c) După deschiderea robinetului gazele se amestecă și după stabilirea echilibrului termic presiunea va fi peste tot aceeași p' și temperatura aceeași T (temperatura termostatului). Numărul total de moli se conservă, deci

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu', \frac{p_1'V_1'}{RT_1'} + \frac{p_2'V_2'}{RT} = \frac{p(V_1' + V_2')}{RT}, \qquad (24)$$

unde $p_1' = p_2' = 2{,}00$ atm și $T_2 = T_2' = T = 300$ K.

Volumul total se conservă (datorită construcției sistemului):

$$V_1 + V_2 = V_1' + V_2', \text{ dar } V_2'/V_2 = \rho_2/\rho_2' = 1/2,\ V_2' = V_2/2,$$
$$V_2 - V_2' = V_1' - V_1,\ V_2 = 2(V_1' - V_1) = 14{,}28\ \text{m}^3, \qquad (25)$$
$$V_2' = V_2/2 = 7{,}14\ \text{m}^3.$$

Atunci din (24) rezultă presiunea cerută

$$p = p_1'\frac{1}{V_1 + V_2}\left(V_1'\frac{T}{T_1'} + V_2'\right) = 2{,}00\ \text{atm}\ \frac{1}{15{,}3}\left(8{,}16\ \frac{300}{250} + 7{,}14\right) =$$
$$= 2{,}2\ \text{atm} = 2{,}23\cdot 10^5 \text{N/m}^2. \qquad (26)$$

Problema 3 Energia inițială a condensatorului — cînd armăturile lui nu ating suprafața lichidului — este dată de relația:

$$W_0 = \frac{1}{2}C_0U_0^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C_0} \text{ cu } C_0 = \frac{\varepsilon_0 Hl}{d} \qquad (1)$$

unde: H — înălțimea plăcilor condensatorului; l — lățimea plăcilor condensatorului; d — distanța dintre plăcile condensatorului.

Cînd plăcile condensatorului vin în contact cu suprafața lichidului, apare o forță de atracție asupra lichidului — dielectric — dirijată după verticală în sus contrar gravitației. Cum sarcina totală a armăturilor rămîne constantă, sistemului nu i se furnizează energie suplimentară (din exterior). Urmează că la urcarea lichidului scade energia cîmpului electric exact cu valoarea energiei potențiale a coloanei de lichid de înălțime h.

Conform legii conservării energiei vom putea scrie

$$W_{\substack{\text{inițială}\\\text{sistem}}} = W_{\substack{\text{finală}\\\text{sistem}}} \qquad \text{sau}$$

$$W_0 = W_1 + W_2 \qquad (2)$$

unde W_0 — energia inițială a cîmpului electric; W_1 — energia finală a cîmpului electric; W_2 — energia potențială a lichidului de înălțime h.

Să explicităm pe W_0, W_1, și W_2:

$$W_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q_0^2}{C_0} \qquad (3)$$

$$W_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q_0^2}{C} \qquad (4)$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\rho\cdot gh^2ld \qquad (5)$$

unde C_0 și C reprezintă capacitățile inițiale și finale ale sistemului, iar

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r hl}{d} + \frac{\varepsilon_0(H-h)l}{d}. \qquad (6)$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind pe (3), (4) și (5) în (2) și ținînd seama de (1) și (6) obținem :

$$\frac{1}{2}\, Q_0^2\, \frac{d}{\varepsilon_0 Hl} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2 d}{\varepsilon_0 \varepsilon_r hl + \varepsilon_0 (H-h)l} + \frac{1}{2}\, \rho \cdot g h^2 dl. \tag{7}$$

Cum $Q_0 = C_0 U_0 = \varepsilon_0 H l E_0$, introducînd expresia lui Q_0 în (7) vom avea :

$$\varepsilon_0 H E_0^2 = \frac{\varepsilon_0 H^2 E_0^2}{\varepsilon_r h + (H-h)} + \rho \cdot g h^2. \tag{8}$$

Ecuația (8) se poate aduce la următoarea formă finală :

$$(\varepsilon_r - 1)h^2 + Hh - \frac{E_0^2 \varepsilon_0 H(\varepsilon_r - 1)}{\rho g} = 0. \tag{9}$$

Rezolvînd ecuația (9) obținem :

$$h_{1,2} = -\frac{H}{2(\varepsilon_r - 1)} \pm \sqrt{\frac{H^2}{4(\varepsilon_r - 1)^2} + \frac{E_0^2 \varepsilon_0 H}{\rho g}} \tag{10}$$

sau

$$h_{1,2} = \frac{H}{2(\varepsilon_r - 1)} \left[-1 \pm \sqrt{1 \pm \frac{4 E_0^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)^2}{\rho g H}} \right]. \tag{10'}$$

Discuție. Se poate observa imediat că numai soluția cu semnul plus are sens deoarece numai în acest caz $h > 0$.

Scriind ecuația (9) sub forma :

$$\frac{(\varepsilon_r - 1)h^2}{H} + h - \frac{E_0^2 \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)}{\rho g} = 0$$

observînd că dacă $H \gg h$ se poate face următoarea aproximație :

$$h \approx \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)}{\rho g} E_0^2.$$

Problema 4. Din principiul lui Fermat rezultă că timpul necesar ca lumina să ajungă din P_1 în P_2 (P_1 și P_2 fiind puncte conjugate), este independent de drum — în cazul aproximației gaussiene.

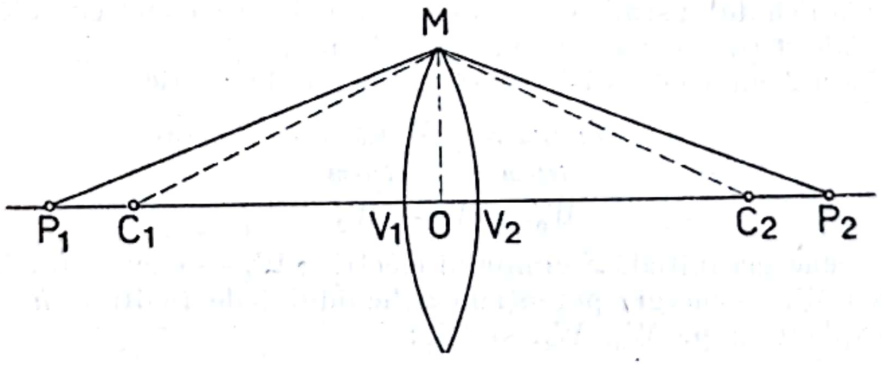


Fig. II.28, R.

Fie T_1 timpul necesar parcurgerii drumului optic P_1MP_2 și T_2 timpul necesar parcurgerii drumului optic $P_1V_1OV_2P_2$ (fig. II.28, *R*). Vom putea scrie :

$$T_1 = \frac{P_1M}{v_1} + \frac{P_2M}{v_2}$$

unde $P_1M = \sqrt{P_1O^2 + MO^2} \approx P_1O + \frac{h^2}{2P_1O}$ deoarece $h = OM \ll P_1O$ sau P_2O.

Scanned with OKEN Scanner

În mod analog se poate scrie pentru P_2M : $P_2M \approx P_2O + \frac{h^2}{2P_2O}$.

deci $$T_1 = \frac{P_1O}{v_1} + \frac{P_2O}{v_2} + \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{v_1P_1O} + \frac{1}{v_2P_2O}\right)$$

iar $$T_2 = \frac{P_1V_1}{v_1} + \frac{V_2P_2}{v_2} + \frac{V_1V_2}{v}.$$

Dar : $V_1V_2 = V_1O + OV_2 = R_1 - C_1O + R_2 - C_2O = R_1 - \sqrt{R_1^2 - h^2} + R_2 - \sqrt{R_2^2 - h^2}$,

sau : $V_1V_2 \simeq \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$.

Ţinînd seama de faptul că $T_1 = T_2$ se obţine :

$$\frac{P_1O - P_1V_1}{v_1} + \frac{P_2O - V_2P_2}{v_2} + \frac{h_2}{2}\left(\frac{1}{v_1P_1O} + \frac{1}{v_2P_2O}\right) = \frac{h^2}{2v}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Cum $P_1O - P_1V_1 = V_1O = \frac{h_2}{2R_1}$ urmează că :

$$\frac{h^2}{2R_1v_1} + \frac{h^2}{2R_2v_2} + \frac{h^2}{2v_1P_1O} + \frac{h^2}{2v_2P_2O} = \frac{h^2}{2vR_1} + \frac{h^2}{2R_2v},$$

sau : $$\frac{1}{v_1R_1} + \frac{1}{v_2R_2} + \frac{1}{v_1P_1O} + \frac{1}{v_2P_2O} = \frac{1}{vR_1} + \frac{1}{vR_2}$$

sau încă :

$$\frac{1}{v_1P_1O} + \frac{1}{v_2P_2O} = \frac{1}{v}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{1}{v_1R_1} - \frac{1}{v_2R_2}$$

şi cum $v \sim \frac{1}{n}$ avem :

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = n_0\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \frac{n_1}{R_1} - \frac{n_2}{R_2}$$

unde $P_1O = s_1$ şi $OP_2 = s_2$.

Aşadar : $$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_0 - n_2}{R_2}. \qquad (1)$$

Dacă P_1 este la infinit atunci s_2 devine egală cu distanţa focală (şi invers). Deci :

$$\frac{n_2}{f_2} = \frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_0 - n_2}{R_2}$$

de unde $$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{n_2}\left(\frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_0 - n_2}{R_2}\right) \qquad (2)$$

şi $$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{n_1}\left(\frac{n_0 - n_1}{R_1} + \frac{n_0 - n_2}{R_2}\right). \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (1), (2) și (3) rezultă :

$$\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1. \qquad (4)$$

Lentila fiind plan convexă (fig. II.29, *R*) distanțele ei focale vor fi respectiv egale cu :

$$f_1 = \frac{n_1 R}{n_0 - n_1} = \frac{R}{n_0 - 1} \text{ și } f_2 = \frac{n_2 R}{n_0 - n_1} = \frac{n_2 R}{n_0 - 1}.$$

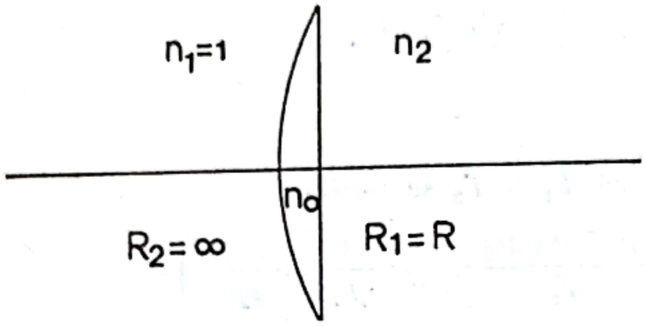


Fig. II.29, R.

În cazul bilentilelor Billet S_1 și S_2 sînt imagini reale ale punctului obiect S ce pot fi considerate ca surse coerente de lumină (fig. II.30, *R*). Se va ține seama de următoarele aproximări.

$$O_1O_2 = \Delta \ll r, \qquad OM = \Delta + r \approx r,$$
$$SO \approx SO_1 \approx SO_2 = p_1, \quad O_1S_1 = O_2S_2 \approx OS' = p_2.$$

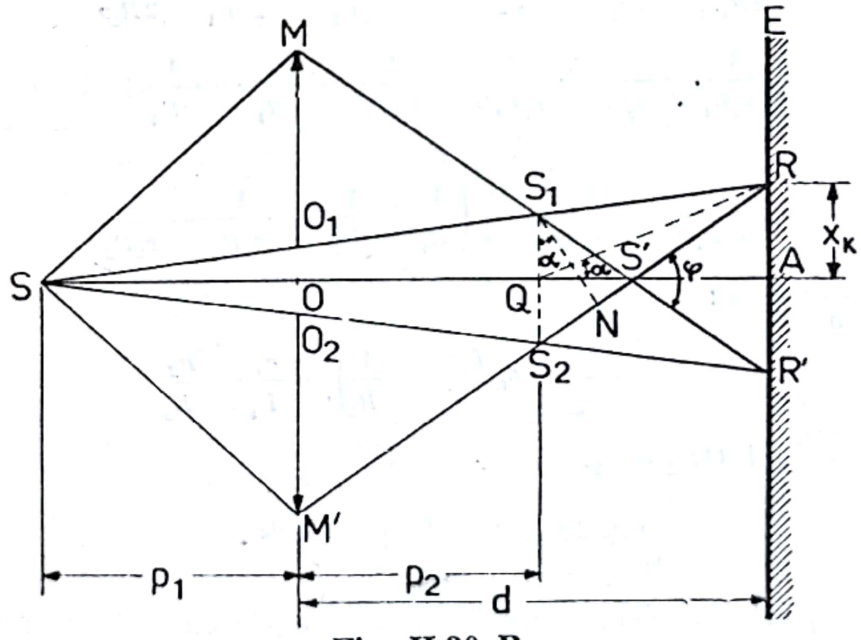


Fig. II.30, R.

Triunghiurile SO_1O_2 și SS_1S_2 sînt asemenea, deci :

$$\frac{S_1S_2}{O_1O_2} = \frac{p_1 + p_2}{p_1} \text{ sau } S_1S_2 = \Delta \cdot \left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right),$$

S_1S_2 fiind distanța dintre cele două surse coerente.

Pentru calculul numărului de franje este nevoie să se cunoască cîmpul de interferență ($S'RR'$) și valoarea interfranjei.

Scanned with OKEN Scanner

Vom calcula întîi lărgimea cîmpului de interferență, RR':

$RR' = 2RA = 2S'A \cdot \text{tg}\,\frac{\varphi}{2}$ și ținînd seama de faptul că:

$S'A \simeq d - p_2$ iar $\text{tg}\,\frac{\varphi}{2} = \frac{r}{p_2}$ vom avea $RR' = 2(d - p_2)\,\frac{r}{p_2}$.

Condiția de maximum de interferență este dată de relația:

$$S_2N = k\lambda.$$

Dar $S_2N = S_1S_2 \sin\alpha$, unde $\sin\alpha = \frac{RA}{QR} \simeq \frac{x}{d - p_2}$ și $S_1S_2 = \Delta\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right)$.

Așadar: $S_2N = \Delta\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right)\frac{x}{d - p_2} = k\lambda.$

Franja de maxim de ordin k, va fi:

$$x_k = k\,\frac{\lambda(d - p_2)}{\Delta\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right)},$$

deci interfranja va avea valoarea:

$$i = \frac{\lambda(d - p_2)}{\Delta\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right)}.$$

Numărul de franje de observat este:

$$N = \frac{RR'}{i} = \frac{2(d - p_2)\,\frac{r}{p_2}}{\frac{\lambda(d - p_2)}{\Delta\left(1 + \frac{p_2}{p_1}\right)}} = 2r\Delta\,\frac{1 + \frac{p_2}{p_1}}{\lambda p_2}$$

unde p_2 se poate scoate din formula lentilelor, ținînd seama că de ambele părți ale lentilei este aer, deci

$$p_2 = \frac{p_1 f}{p_1 - f}$$

Lucrarea experimentală. *a) Determinarea densității materialului.* Densitatea medie a celor două corpuri este astfel aleasă încît ele plutesc pe apă.

Cu ajutorul masei de fluid (lichid) dezlocuite se determină masa primului corp (plin):

$$m = m_a = V_a\rho_a = S_aH\rho_a, \qquad (1)$$

unde S_a este aria bazei cufundată în apă, H — lungimea cilindrului, ρ_a — densitatea apei.

Pe de altă parte, masa cilindrului de rază R și densitate ρ este

$$m = V\rho = \pi R^2 H\rho. \qquad (2)$$

Din cele două relații obținem densitatea corpului:

$$\rho = \rho_a\,\frac{S_a}{\pi R^2}. \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru calculul ariei S_a se măsoară distanța h rămasă liberă deasupra apei (fig. II.31, R).

Aria S_a se compune din aria triunghiului OAB și aria sectorului de unghi $2\pi - 2\theta$.

Aria triunghiului:

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{R^2 - (R-h)^2} \cdot (R-h) = (R-h)\sqrt{h(2R-h)}. \tag{4}$$

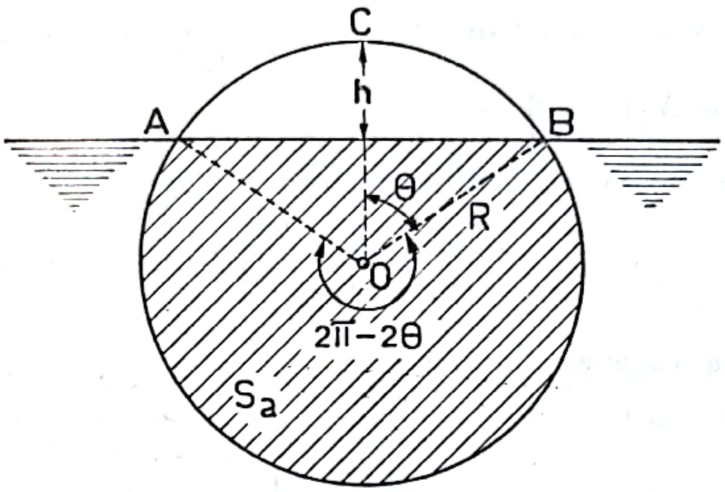


Fig. II.31, R.

Aria sectorului:

$$\frac{2(\pi - \theta)}{2\pi} \pi R^2 = R^2 \left(\pi - \arccos \frac{R-h}{R}\right). \tag{5}$$

Prin urmare aria cufundată:

$$S_a = (R-h)\sqrt{h(2R-h)} + R^2 \left(\pi - \arccos \frac{R-h}{R}\right), \tag{6}$$

unde R și h sînt măsurate cu rigla.

b) Determinarea razei cavității cilindrice. Cel de-al doilea corp (cu cavitate) dezlocuiește o masă de apă:

$$m' = m'_a = S_a' H \rho_a, \tag{7}$$

unde S_a' este aria bazei cufundată în apă.

Pe de altă parte, masa corpului se scrie, ținînd seama de cavitate:

$$m' = (V - v)\rho = \pi(R^2 - r^2)H\rho. \tag{8}$$

Din cele două ecuații rezultă pentru raza r a cavității:

$$r^2 = R^2 - \frac{\rho_a}{\pi\rho} S_a', \tag{9}$$

unde S'_a se determină exact la fel ca și S_a de mai sus.

c) Determinarea distanței dintre axa cilindrului și axa cavității. Punem corpul al doilea pe masa orizontală (sau în apă să plutească) și trasăm axa verticală de simetrie AB (fig. II.32, R).

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul riglei formăm un plan înclinat. Punem corpul pe acest plan înclinat și determinăm unghiul maxim al planului pentru care corpul încă mai rămîne în repaus (nu se rostogolește). Ținînd seama că centrul de greutate se găsește pe axa AB dincolo de axa cilindrului (punctul G în fig. II.32, R) și că la echilibru centrul de greutate trebuie să fie situat pe verticala punctului de contact dintre cilindru și planul înclinat, obținem situația din figura II.33, R pentru unghiul maxim al planului (diametrul AB va fi orizontal).

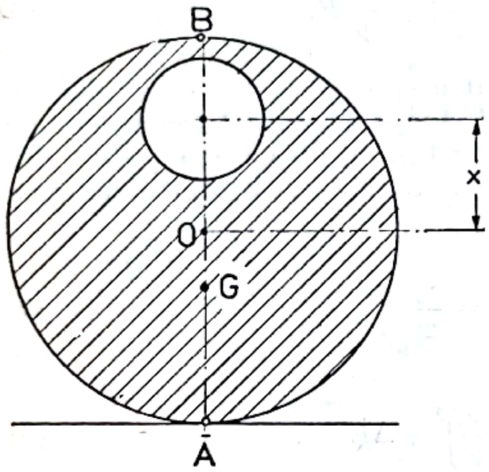


Fig. II.32, R.

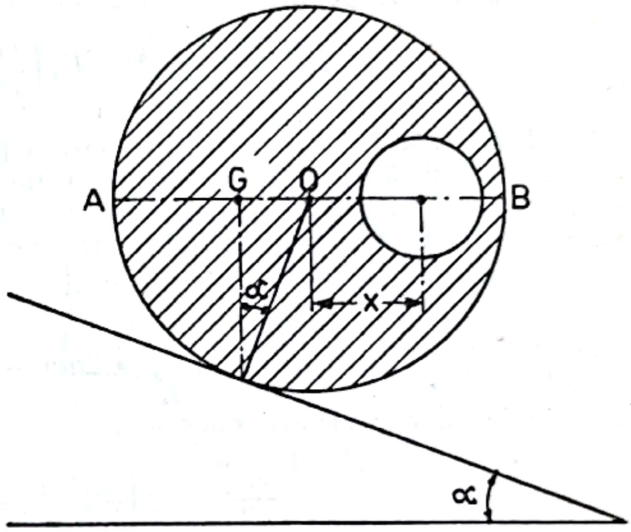


Fig. II.33, R.

Distanța OG a centrului de greutate este dată de condiția momentelor față de centrul O:

$$m' \cdot OG = m_c x, \quad (m_c \text{ — masa dezlocuită de cavitate}), \tag{10}$$

dar

$$OG = R \sin \alpha, \tag{11}$$

prin urmare, $x = OG \dfrac{m'}{m_c} = R \sin \alpha \cdot \dfrac{R^2 - r^2}{r^2}$. (12)

d) La fiecare măsurătoare trebuie apreciată eroarea de citire (în esență pentru distanțe). Apoi ținînd seama de expresiile pentru ρ, r și x trebuie dedusă eroarea maximă de determinare a acestor mărimi.

A VII-a

Olimpiadă internațională de fizică

1974, Varșovia, R. P. Polonă

Problema 1. Se știe că nivelele energetice ale atomului de hidrogen sînt date de relația:

$$E = -\frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^4 m}{8h^2 \varepsilon_0^2}; \quad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{1}$$

Energia stării fundamentale corespunde valorii $n = 1$; deci

$$E_1 = -\frac{e^4 m}{8h^2 \varepsilon_0^2}. \tag{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar, relaţia (1) se mai poate scrie :

$$E = -\frac{1}{n^2} E_1 \qquad (1')$$

unde E_1 este energia de ionizare.

Cea mai mică energie pe care o poate primi atomul de hidrogen pentru a trece într-o stare excitată, corespunde saltului electronului de pe nivelul energetic $n = 1$, pe nivelul $n = 2$, deci :

$$\Delta E = E' - E = E_1 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4} E_1. \qquad (3)$$

Trebuie aflată cea mai mică viteză pentru care pierderea de energie în urma ciocnirii să atingă valoarea ΔE. Cunoscînd faptul că pierderea de energie este maximă atunci cînd ciocnirea este perfect neelastică, vom putea afla valoarea vitezei limită, aplicînd legile de conservare ale impulsului şi energiei.

Din legea conservării impulsului rezultă :

$$mv_0 = 2mv \rightarrow v = \frac{v_0}{2} \qquad (4)$$

iar din legea conservării energiei :

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \Delta E \qquad (5)$$

sau :

$$\frac{mv_0^2}{4} = \Delta E. \qquad (5')$$

Înlocuind în (5') pe ΔE din (3) se obţine : $v_0 = \sqrt{\frac{3E_1}{m}}$. (6)

Înlocuind cu datele problemei avem : $v_0 = 6{,}26 \cdot 10^4$ m/s.

Întrebarea a doua este în legătură cu efectul Doppler. Sîntem în situaţia observatorului mobil şi a sursei fixe. Observatorul este solidar legat de atomul în mişcare, sursa fixă fiind atomul în repaus (ce emite radiaţie electromagnetică). Prin urmare frecvenţele radiaţiei observate în cele două sensuri de mişcare ale atomului incident vor fi :

$$\nu_1 = \left(1 + \frac{v}{C}\right)\nu \text{ şi } \nu_2 = \left(1 - \frac{v}{C}\right)\nu.$$

Diferenţa dintre frecvenţele radiaţiei observate va fi :

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = \frac{2v}{C}\nu.$$

Şi cum $v = \frac{v_0}{2}$ urmează că : $\Delta\nu = \frac{v_0}{C}\nu$.

Media aritmetică a celor două frecvenţe este : $\nu_m = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2} = \nu$.

În sfîrşit : $\frac{\Delta\nu}{\nu_m} = \frac{v_0}{C} = 2{,}09 \cdot 10^{-4}$ sau în procente $2{,}09 \cdot 10^{-2}\ \% \approx 0{,}02\%$.

Problema 2. Întrebarea pe care ne-o punem este : ce traiectorie descrie raza de lumină prin lama cu feţe plan-paralele ? Dacă considerăm lama ca

Scanned with OKEN Scanner

fiind formată dintr-o serie de lame subțiri de indici de refracție diferiți, atunci, aplicînd legea refracției pentru fiecare dioptru, vom putea scrie :

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{n_2}{n_1}; \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3} = \frac{n_3}{n_2}; \frac{\sin \beta_3}{\sin \beta_4} = \frac{n_4}{n_3} \ldots\ldots \quad (1)$$

sau : $n_1 \sin \beta_1 = n_2 \sin \beta_2$; $n_2 \sin \beta_2 = n_3 \sin \beta_3$; $n_3 \sin \beta_3 = n_4 \sin \beta_4 \ldots$ (1')

Relațiile (1), (1') sînt valabile oricît de subțiri ar fi lamele plan-paralele din care considerăm că ar fi formată lama inițială (fig. II.34, *R*).

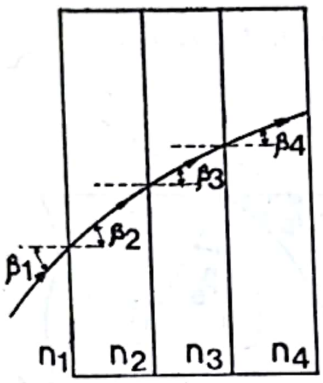


Fig. II.34, R.

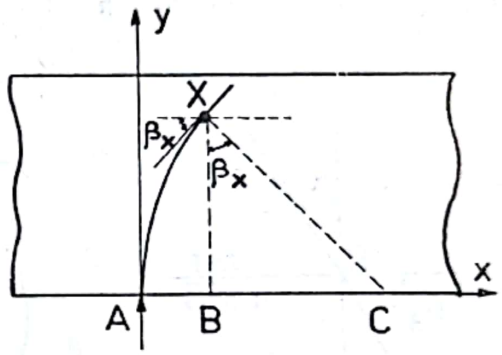


Fig. II.35, R.

Cum indicele de refracție se modifică, conform enunțului, doar după axa *Ox*, putem scrie :

$$n_x \sin \beta_x = \text{const.} \quad (2)$$

În cazul analizat, la fața de intrare a lamei avem :

$$n_0 \sin 90^\circ = n_x \sin \beta_x \quad (3) \qquad \text{adică} \quad n_0 = n_x \sin \beta_x, \quad (3')$$

deci constanta în cazul nostru este n_0.

Ținînd seama de relația din enunț $n = \frac{n_0}{1 - \frac{x}{R}}$ și de relația (3') obținem :

$$\sin \beta_x = \frac{n_0}{n_x} = 1 - \frac{x}{R} = \frac{R - x}{R}. \quad (4)$$

Fie un punct *X* în interiorul lamei de abscisă *x* (fig. II.35, *R*). Fie β_x unghiul de incidență la suprafața de separație *XB*. Se poate constata imediat că unghiul *BXC* este tot β_x (unghiuri cu laturile perpendiculare).

Întrucît $\sin \beta_x = \frac{n_0}{n_x} = \frac{R - x}{R}$ urmează că traiectoria descrisă de raza de lumină este de fapt un arc de cerc cu raza $XC = AC = R$ (adică tocmai constanta ce figura în relația inițială din enunț).

În continuare, se poate răspunde, pe rînd, la întrebările puse.

a) În punctul *B*, la ieșirea în aer a razei de lumină (fig. II.36, *R*) aplicînd legea refracției vom scrie :

$$n_{aer} \sin \alpha = n_B \sin (90 - \beta_B) \quad (5) \qquad \text{sau} \quad n_B = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta_B}. \quad (5')$$

Dar $n_B \sin \beta_B = n_0$ conform relației (2), deci $\sin \beta_B = \frac{n_0}{n_B}$ sau, $\cos \beta_B = \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_B}\right)^2}$. Înlocuind această ultimă relație în (5') obținem :

$$n_B = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n_B^2}}} \text{ de unde } n_B = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \alpha}.$$

Făcînd înlocuirile, rezultă : $n_B = 1{,}3$.

b) Calculul coordonatei X_B a punctului B (fig. II.37, *R*).

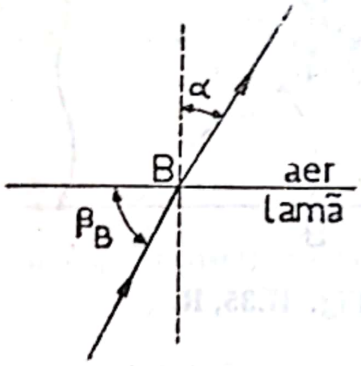


Fig. II.36, R.

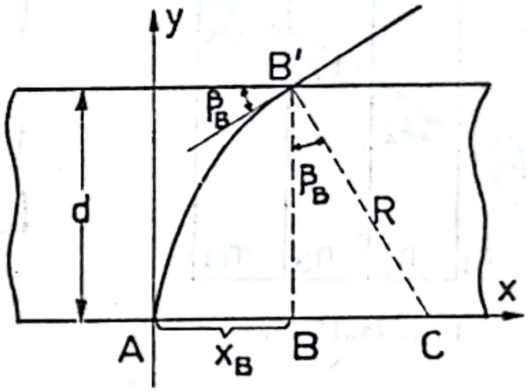


Fig. II.37, R.

Se știe că : $\sin \beta_B = \frac{n_0}{n_B} = \frac{R - x_B}{R} = \frac{1{,}2}{1{,}3}$ de unde $x_B = \frac{(1{,}3 - 1{,}2)\,R}{1{,}3} = 1$ cm.

c) Din figura II.37, R rezultă : $d = R \cos \beta_B$, sau : $d = R\sqrt{1 - \sin^2 \beta_B}$, sau încă : $d = R\sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n_B^2}}$.

Făcînd înlocuirile obținem pentru d valoarea 5 cm.

Același lucru putem să-l obținem scriind că punctul B se găsește pe cercul de rază R : $y^2 + (R - x^2) = R^2$ de unde $y = \sqrt{x(2R - x)}$, sau $y = \sqrt{25} = 5$ cm.

S-ar putea ridica următoarea problemă : ce s-ar întîmpla cu raza de lumină dacă n-ar cădea pe lamă în punctul A ci la stînga sau la dreapta punctului A ? Raza ce cade pe lamă în A poate descrie cel mult un sfert de cerc pentru că la $x = R$, $n = \infty$.

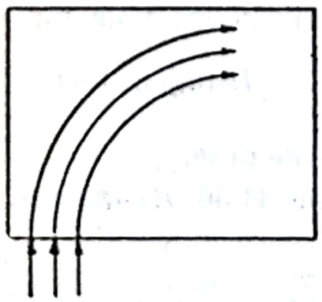


Fig. II.38, R.

Printr-un raționament analog celui efectuat anterior, rezultă că și celelalte raze vor descrie sferturi de arce de cerc concentrice (fig. II.38, *R*).

Problema 3. O schemă posibilă a motorului poate fi de exemplu, cea reprezentată în figura II.39, *R*.

Prima fază a ciclului : ventilul Z_1 (pentru gaz) este deschis, ventilul Z_2 (pentru aer) este închis. Conform legii lui Dalton presiunea de sub piston

Scanned with OKEN Scanner

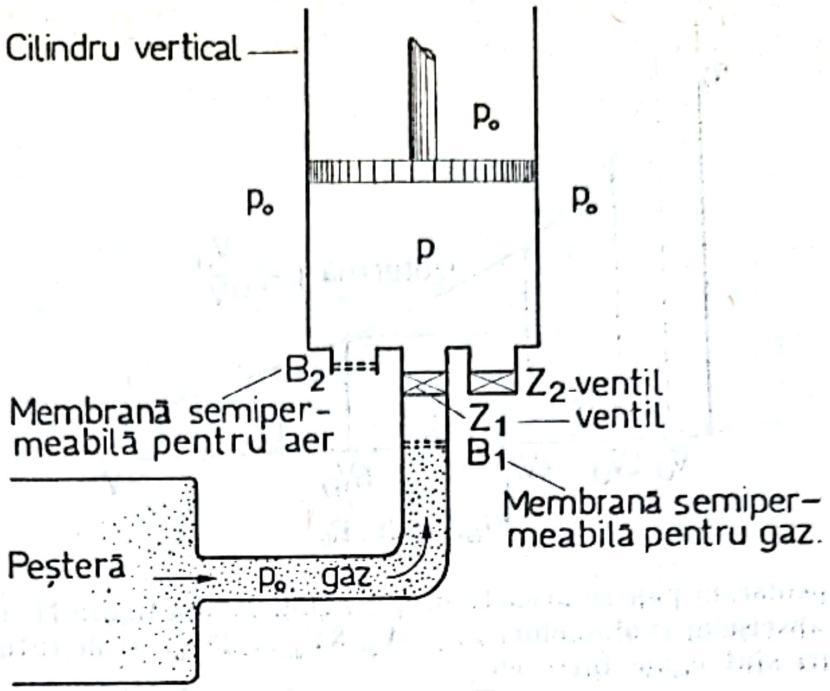


Fig. II.39, R.

(construit foarte ușor) va deveni $p_0 + p_0 = 2p_0$, (p_0 — presiunea atmosferică). Ridicînd pistonul de la baza cilindrului, presiunea, excedentară față de presiunea atmosferică, efectuează lucru mecanic. În această fază se consumă o cantitate de gaz, care emană din peșteră, prevăzută pentru un ciclu întreg. Dacă volumul acestei cantități de gaz este V_0, lucrul mecanic efectuat de piston în această fază va fi p_0V_0.

Deoarece am consumat deja cantitatea de gaz, care revine întregului ciclu, trebuie să închidem ventilul Z_1 lăsînd gazul să se destindă cu ventilul Z_1 închis. Destinderea va fi izotermă și presiunea parțială a gazului din cilindru va scădea după legea Boyle-Mariotte : p_0V_0/V.

Datorită membranei semipermeabile pentru aer B_2, presiunea parțială a aerului din cilindrul de sub piston rămîne mereu egală cu presiunea atmosferică p_0 din exterior și echilibrează presiunea atmosferică de deasupra pistonului. În modul acesta, lucrul mecanic util este efectuat de presiunea parțială a gazului din grotă.

Chestiunea pusă în problemă poate fi reformulată într-o formă echivalentă :

Există vreo limitare pentru lucrul mecanic care poate fi obținut prin destinderea izotermă a unui volum dat de gaz ?

Pentru a răspunde la această întrebare, să trasăm grafic presiunea p_0V_0/V în funcție de V (fig. II.40, R).

Este evident că dacă în această fază (a doua), gazul se destinde pînă la un volum V_k, lucrul mecanic efectuat în faza a doua va fi egal cu aria de sub curba reprezentativă a izotermei, cuprinsă între ordonatele V_0 și V_k.

Trebuie arătat că pentru un volum V_k suficient de mare (și nu există vreo limitare teoretică pentru aceasta), lucrul mecanic obținut poate fi oricît de mare.

Scanned with OKEN Scanner

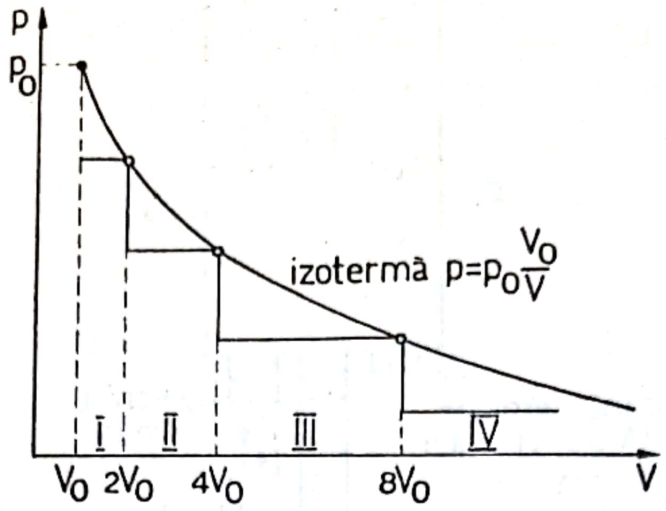


Fig. II.40, R.

Să considerăm pentru aceasta dreptunghiurile din figura II. 40 *R*, corespunzătoare absciselor (volumelor) $2V_0$, $4V_0$, $8V_0$,..,2^nV_0. Ariile tuturor acestor dreptunghiuri sînt egale între ele:

$$p\Delta V = \frac{p_0V_0}{2^iV_0}\cdot(2^iV_0 - 2^{i-1}V_0) = \frac{1}{2}p_0V_0 = \text{const.} \qquad (1)$$

Dar sub curbă pot încăpea oricît de multe astfel de dreptunghiuri (luînd abscisele 2^nV_0, $n = 1, 2, 3\ldots$). Dacă $V_k = 2^nV_o$, lucrul mecanic este cuprins între următoarele limite:

$$n\cdot\frac{p_0V_0}{2} < W < n\cdot p_0V_0 \qquad (2)$$

sau aproximativ:

$$W \cong p_0V_0\log_2\frac{V_k}{V_0}\cdot \qquad (3)$$

Dealtfel, cu ajutorul calculului integral se obține imediat:

$$W = \int pdV = \int_{V_o}^{V_k}\frac{p_0V_0}{V}\,dV = p_0V_0\,\ln\frac{V_k}{V_0}\cdot \qquad (4)$$

Practic, logaritmul nu poate da un număr prea mare, deoarece *funcția logaritm crește extrem de încet* (de exemplu, dacă $V_k = 1\,000\,000V_0$ obținem abia $\ln 10^6 = 6\cdot 2{,}3 = 13{,}8$), dar totuși teoretic numărul acesta nu este limitat.

Desigur după atingerea volumului dorit V_k, trebuie deschis ventilul Z_2 și lăsat pistonul să coboare în poziția inițială, fără consum de lucru mecanic.

În modul acesta am demonstrat că într-un timp dat, egal cu durata ciclului, putem obține, teoretic, un lucru mecanic oricît de mare. Puterea motorului (ideal) poate fi deci oricît de mare, deși debitul gazului emanat din peșteră este limitat.

Desigur acest lucru mecanic este obținut pe seama căldurii mediului ambiant, absorbită în destinderea izotermă a gazului. Rezultatul nu contrazice principiul II al termodinamicii, deoarece consumul de căldură din mediul ambiant nu este unicul rezultat al funcționării motorului. Se produce o amestecare continuă a gazului emanat din peșteră, cu aerul atmosferic.

Scanned with OKEN Scanner

Lucrare experimentală. Pentru determinarea rezistenţei necunoscute se realizează schema din figura II.41, *R* în care am notat cu *X* cutia cu montajul necunoscut.

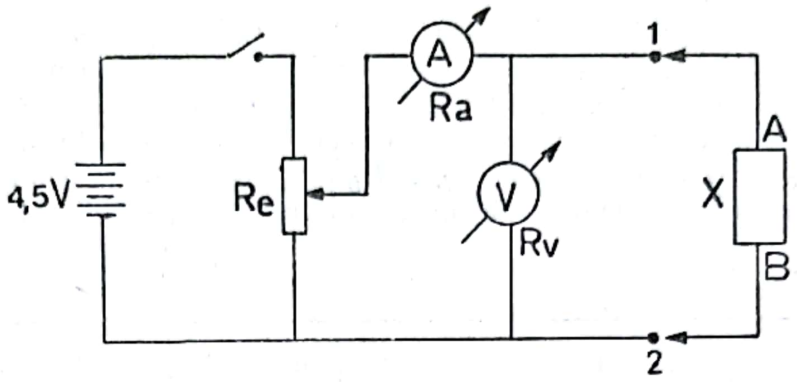


Fig. II.41, R.

Pentru o valoare dată a tensiunii, de exemplu : $U = 0{,}71$ V, se obţin două valori ale intensităţii curentului în funcţie de modul de cuplare al montajului X la bornele 1 şi 2 ale circuitului şi anume : $i_{AB} = 0{,}008$ A şi $i_{BA} = 0{,}03$ A. Rezistenţele corespunzătoare vor fi : $R_{AB} = 88{,}7\ \Omega$ şi $R_{BA} = 23{,}6\ \Omega$. Se constată că rezistenţele montajului *X* au, în raport cu rezistenţa internă a voltmetrului, valori mici deci metoda aval utilizată în schema din figura II.41,*R* este avantajoasă, erorile de măsură fiind mici.

Vom încerca să determinăm în cele ce urmează schema montajului *X*. Pentru aceasta vom analiza posibilităţile de dispunere a elementelor componente (fig. II.42, *R*, *a*—*j*).

Analizînd montajele se constată :

— montajele (*a*), (*c*) (*e*), (*f*) şi (*g*) nu corespund deoarece într-un sens au rezistenţa ∞ ;

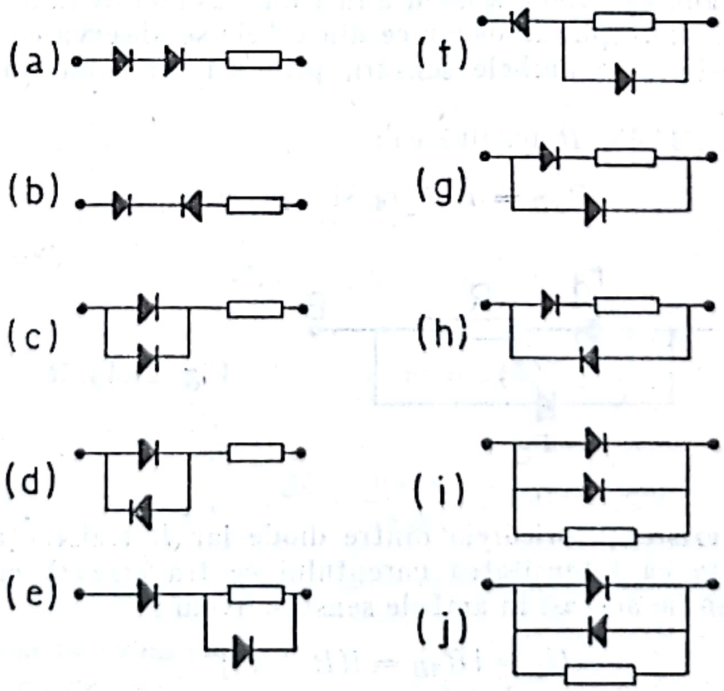


Fig. II.42, R.

Scanned with OKEN Scanner

— montajul (*b*), nu corespunde deoarece are rezistența ∞ în ambele sensuri ;

— montajele (*d*) și (*j*) nu corespund deoarece au rezistențele egale în ambele sensuri ;

— montajele (*h*) și (*i*) sînt singurile montaje posibile. Montajul real urmează a fi determinat prin alte măsurători. În cele ce urmează se va ține seama de faptul că rezistența internă a unei diode în conducție directă variază nelinear cu tensiunea aplicată la bornele ei. Folosind montajul experimental inițial se determină variația lui R_{AB} și R_{BA} în funcție de tensiunea aplicată la bornele montajului X. Datele obținute sînt trecute în tabelele I și II.

Tabelul I

U_1(V)	0,71	0,73	0,78	0,81	0,84	0,88	0,90
I_1(A)	0,008	0,010	0,012	0,014	0,016	0,018	0,02
$R_{AB}(\Omega) = \frac{U_1}{I_1}$	88,7	76	65	57,8	52,5	49	45

Tabelul II

U_2(V)	0,64	0,66	0,68	0,69	0,71
I_2(A)	0,008	0,012	0,016	0,02	0,03
$R_{BA}(\Omega) = \frac{U_2}{I_2}$	80	55	42,5	34,5	23,6

În cazul montajului (*i*) rezistența într-un sens nu este funcție de tensiune ; acest montaj nu corespunde deoarece din tabele se observă că rezistența este funcție de tensiune în ambele sensuri, prin urmare montajul real este (*h*) (fig. II.43, *R*).

Din figura II.43, *R* rezultă că :

$$R_{AB} = R + r_d \text{ și } R_{BA} = r_d,$$

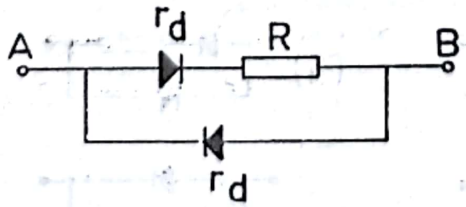


Fig. II.43, R.

unde r_d este rezistența oricăreia dintre diode iar R rezistența necunoscută. Punînd condiția ca intensitatea curentului ce traversează circuitul din figura II.43, *R* să fie aceeași în ambele sensuri, avem :

$$U_1 = iR_{AB} = i(R + r_d) \quad (1)$$

$$U_2 = iR_{BA} = ir_d. \quad (2)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (1) și (2) rezultă :

$$U_1 - U_2 = iR, \text{ de unde : } R = \frac{U_1 - U_2}{i}. \qquad (3)$$

Folosind tabelele I și II se ridică caracteristicile curent tensiune în ambele sensuri de conducție, pe aceeași hîrtie milimetrică ; fie $U_1 = U_1(i)$ și $U_2 = U_2(i)$. Cu ajutorul formulei (3) se determină valoarea lu R pentru cîteva valori ale lui i, de exemplu :

$$i = 0{,}02 \text{ A}, R_1 = \frac{0{,}21}{0{,}02} = 10{,}5 \ \Omega ;$$

$$i = 0{,}018 \text{ A}, R_2 = \frac{0{,}19}{0{,}018} = 10{,}05 \ \Omega ;$$

$$i = 0{,}01 \text{ A}, R_3 = \frac{0{,}1}{0{,}01} = 10 \ \Omega.$$

Valoarea medie a rezistenței va fi :

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3} = \frac{10{,}5 + 10{,}05 + 10}{3} = 10{,}18 \ \Omega.$$

Calculul erorilor. *a) Eroare absolută.* Se știe că eroarea absolută este dată de relație : $\delta N_i = N_i - \bar{N}$, unde δN_i este eroarea absolută asupra măsurării individuale, N_i o valoare individuală, iar $\bar{N}$ valoarea medie. Eroarea absolută medie $\overline{\delta N}$ este media aritmetică a erorilor absolute ale măsurărilor individuale luate în modul

$$\overline{\delta N} = \frac{|\delta N_1| + |\delta N_2| + \ldots + |\delta N_k|}{k}.$$

În cazul nostru vom avea :

$$\delta R_1 = R_1 - \bar{R} = 10{,}5 \ \Omega - 10{,}18 \ \Omega = 0{,}32 \ \Omega ;$$
$$\delta R_2 = R_2 - \bar{R} = 10{,}05 \ \Omega - 10{,}18 \ \Omega = -0{,}13 \ \Omega ;$$
$$\delta R_3 = R_3 - \bar{R} = 10{,}00 \ \Omega - 10{,}18 \ \Omega = -0{,}18 \ \Omega.$$

Deci : $\overline{\delta R} = \frac{0{,}32 + 0{,}13 + 0{,}18}{3} = \frac{0{,}63}{3} = 0{,}21 \ \Omega.$

Așadar rezultatul final al măsurării este :

$$R = (10{,}18 \pm 0{,}21) \ \Omega.$$

b) Eroare relativă. Se știe că eroarea relativă medie ($\overline{\Delta N}$), asupra rezultatului, este raportul dintre eroarea absolută medie ($\overline{\delta N}$) și valoarea medie ($\bar{N}$) a mărimii măsurate : $\overline{\Delta N} = \frac{\overline{\delta N}}{\bar{N}}$.

În cazul nostru avem : $\overline{\Delta R} = \frac{\overline{\delta R}}{\bar{R}} = \frac{0{,}21 \ \Omega}{10{,}18 \ \Omega} \approx 0{,}02 = 2\%$.

Observații. Se pot menționa următoarele surse de erori în timpul efectuării lucrării experimentale :

- precizia aparatelor de măsură ;
- contacte imperfecte ;
- variația rezistenței interne a diodelor cu temperatura joncțiunii (efect Joule).

Scanned with OKEN Scanner

A VIII-a

Olimpiadă internațională de fizică

1975, Güstrow, R. D. Germană

Problema 1. *a) Cazul* $\omega = 0$. Asupra corpului acționează forța de greutate $\vec{G} = m\vec{g}$ orientată vertical în jos și forța de interacțiune din partea tijei. La contactul a două corpuri forța de interacțiune se compune dintr-o forță normală de reacțiune $\vec{N}$, perpendiculară pe planul de contact (datorită deformării reciproce a corpurilor), și o forță de frecare tangențială $\vec{F}_f$, conținută în planul de contact (fig. II.44, *R*). Corpul avînd tendința de a luneca în jos, forța de frecare asupra corpului este orientată în sus de-a lungul tijei. La echilibru forța rezultantă este nulă:

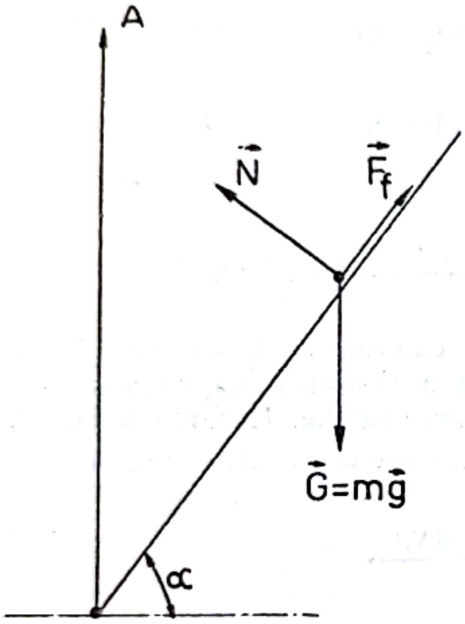


Fig. II.44, R.

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = 0. \qquad (1)$$

Proiectînd această ecuație vectorială pe direcția tijei și pe o direcție perpendiculară, pe tije avem :

$$mg \sin \alpha - F_f = 0, \quad N - mg \cos \alpha = 0, \qquad (2)$$

de unde $F_f = mg \sin \alpha$, $N = mg \cos \alpha$. (3)

Pentru echilibru trebuie ca forța de frecare F_f să fie mai mică decît forța maximă de frecare statică $f_s = \mu N$ (μ — coeficientul de frecare statică). Prin urmare :

$$F_f = mg \sin \alpha < f_s = \mu N = \mu mg \cos \alpha \quad (4) \quad \text{sau} \quad \operatorname{tg} \alpha < \mu = \operatorname{tg} \beta, \qquad (5)$$

adică

pentru $\alpha < \beta$ corpul este în repaus,

pentru $\alpha > \beta$ corpul se află în mișcare. (6)

(1 punct)*

b) Cazul $\omega \neq 0$. În acest caz corpul se află într-o mișcare circulară uniformă, avînd accelerația centripetă $\omega^2 r$ (fig. II.45, *R*). Pentru viteze unghiulare suficient de mici forța de frecare continuă să fie orientată în sus de-a lungul tijei, dar la viteze mari își poate schimba sensul. Legea a doua a dinamicii se scrie :

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}, \qquad (a = \omega^2 r). \qquad (7)$$

(1 punct)

Corpul se va afla în echilibru dacă

$$|F_f| < f_s = \mu N. \qquad (8)$$

(1 punct)

---

* La această olimpiadă prezentăm și punctajul pentru toate probele așa cum a fost el stabilit de țara gazdă.

Scanned with OKEN Scanner

Proiectînd ecuația (7) pe cele două direcții, avem

$$mg \sin \alpha - F_f = m\omega^2 r \cos \alpha, \quad (9)$$

$$N - mg \cos \alpha = m\omega^2 r \sin \alpha,$$

de unde

$$F_f = mg \sin \alpha - m\omega^2 r \cos \alpha, \quad (10)$$

$$N = mg \cos \alpha + m\omega^2 r \sin \alpha.$$

(2 puncte)

Sensul forței de frecare rezultă din (10):

$F_f > 0$ (orientat în sus) dacă

$$g \sin \alpha > \omega^2 r \cos \alpha \quad (11)$$

$F_f < 0$ (orientat în jos) dacă

$$g \sin \alpha < \omega^2 r \cos \alpha.$$

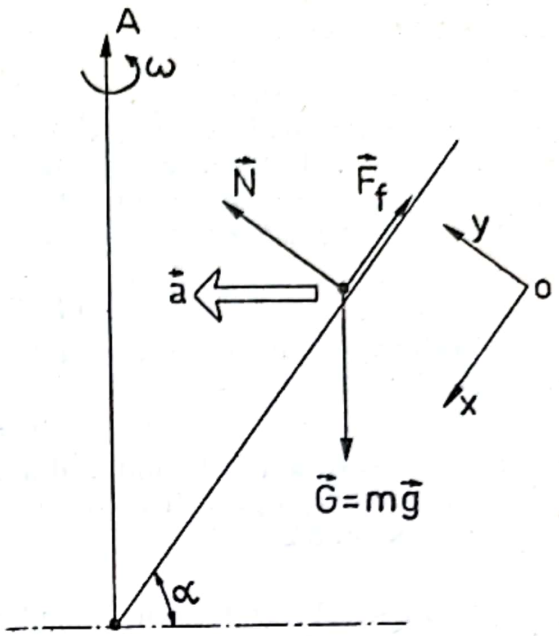


Fig. II.45, R.

Cu expresiile (10) condiția de echilibru (8) devine:

$$|g \sin \alpha - \omega^2 r \cos \alpha| < \operatorname{tg} \beta (g \cos \alpha + \omega^2 r \sin \alpha) \quad (12)$$

sau

$$-\operatorname{tg} \beta (g \cos \alpha + \omega^2 r \sin \alpha) < g \sin \alpha - \omega^2 r \cos \alpha < \operatorname{tg} \beta (g \cos \alpha + \omega^2 r \sin \alpha), \quad (12')$$

de unde prin transformări simple (punînd și $\operatorname{tg} \beta = \sin \beta / \cos \beta$) rezultă:

$$r \cos (\alpha + \beta) < \frac{g}{\omega^2} \sin (\alpha + \beta),$$

$$r \cos (\alpha - \beta) > \frac{g}{\omega^2} \sin (\alpha - \beta), \quad (13)$$

la care se adaugă condiția fizică $r \geqslant 0$.

(1 punct)

În cazul general $\cos (\alpha + \beta) \neq 0$ și $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$, din (13) rezultă:

$$r_1 < r < r_2, \qquad r \geqslant 0, \quad (14)$$

$$r_1 = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg} (\alpha - \beta), \qquad r_2 = \frac{g}{\omega^2} \operatorname{tg} (\alpha + \beta)$$

sau pentru lungimi:

$$l_1 = r_1 / \cos \alpha < l < l_2 = r_2 / \cos \alpha. \quad (15)$$

(1 punct)

Dacă $\alpha < \beta$, r_1 devine negativ și atunci condiția de echilibru devine

$$0 \leqslant r < r_2, \quad (\alpha < \beta). \quad (16)$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul particular cînd $\cos(\alpha+\beta)=0$, $\alpha+\beta=\pi/2$, prima ecuație (13) este verificată pentru orice r. Dacă $\alpha \leqslant \beta$, ecuația a doua (13) este și ea verificată pentru orice $r \geqslant 0$, ($r_2=\infty$), deci corpul se află în echilibru relativ pentru orice poziție. Dacă însă $\alpha > \beta$, ecuația a doua (13) dă, în cazul $\alpha-\beta \neq \pi/2$, $r \geqslant r_1$. În cazul excepțional $\alpha+\beta=\pi/2$, $\alpha-\beta=\pi/2$, deci $\beta=0$ (frecare nulă) și $\alpha=\pi/2$ (tija verticală coincide cu axa), ecuația a doua (13) nu are soluții: nu avem echilibru, corpul lunecă vertical în jos fără frecare.

(1 punct)

(*Total* pentru problema 1:10 puncte).

Problema 2. *a)* Indicele de refracție n este o funcție univocă de lungimea de undă λ:

$$n=n(\lambda). \tag{1}$$

Pentru o distanță focală dată, din relația dată rezultă pentru indicele de refracție n o ecuația pătratică, deci cel mult două valori pentru n, deci și pentru lungimea de undă.

(1 punct)

b) În acest caz trebuie îndeplinită condiția ca distanța focală f să fie aceeași pentru cele două lungimi de undă sau pentru cei doi indici de refracție corespunzători:

$$f(\lambda_1)=f(\lambda_2) \text{ sau } f(n_1)=f(n_2). \tag{2}$$

Folosind relația dată în enunț, rezultă condiția:

$$\frac{n_1 r_1 r_2}{(n_1-1)[n_1(r_2-r_1)+d(n_1-1)]}=\frac{n_2 r_1 r_2}{(n_2-1)[n_2(r_2-r_1)+d(n_2-1)]}. \tag{3}$$

După transformări se obține

$$r_1-r_2=d\left(1-\frac{1}{n_1 n_2}\right). \tag{4}$$

(1 punct)

Din punct de vedere fizic rezultă următoarele condiții:

$$n_1>1; \qquad n_2>1; \qquad d>0. \tag{5}$$

Ținînd seama de aceste condiții, rezultă din (4) inegalitățile

$$d>r_1-r_2>0. \tag{6}$$

(1 punct)

În discuția acestui rezultat distingem patru combinații posibile pentru semnele razelor de curbură r_1, r_2, conform tabelului de mai jos:

Cazul	r_1	r_2	condiția (6) dă:
1	$r_1>0$	$r_2>0$	$0<r_1-r_2<d$ sau $r_2<r_1<d+r_2$
2	$r_1>0$	$r_2<0$	$\lvert r_1\rvert+\lvert r_2\rvert<d$
3	$r_1<0$	$r_2>0$	nu este îndeplinită
4	$r_1<0$	$r_2<0$	$0<\lvert r_2\rvert-\lvert r_1\rvert<d$ sau $\lvert r_1\rvert<\lvert r_2\rvert<d+\lvert r_1\rvert$

Scanned with OKEN Scanner

Din discuția dată rezultă următoarele forme posibile pentru lentile:

Cazul 1), figura II.46, *R*, *a*. Centrul M_2 se află totdeauna în dreapta lui M_1, fiindcă

$$S_1M_2 = d + r_2 > r_1 = S_1M_1 \text{ sau } M_1M_2 = (d + r_2) - r_1 > 0. \qquad (7)$$

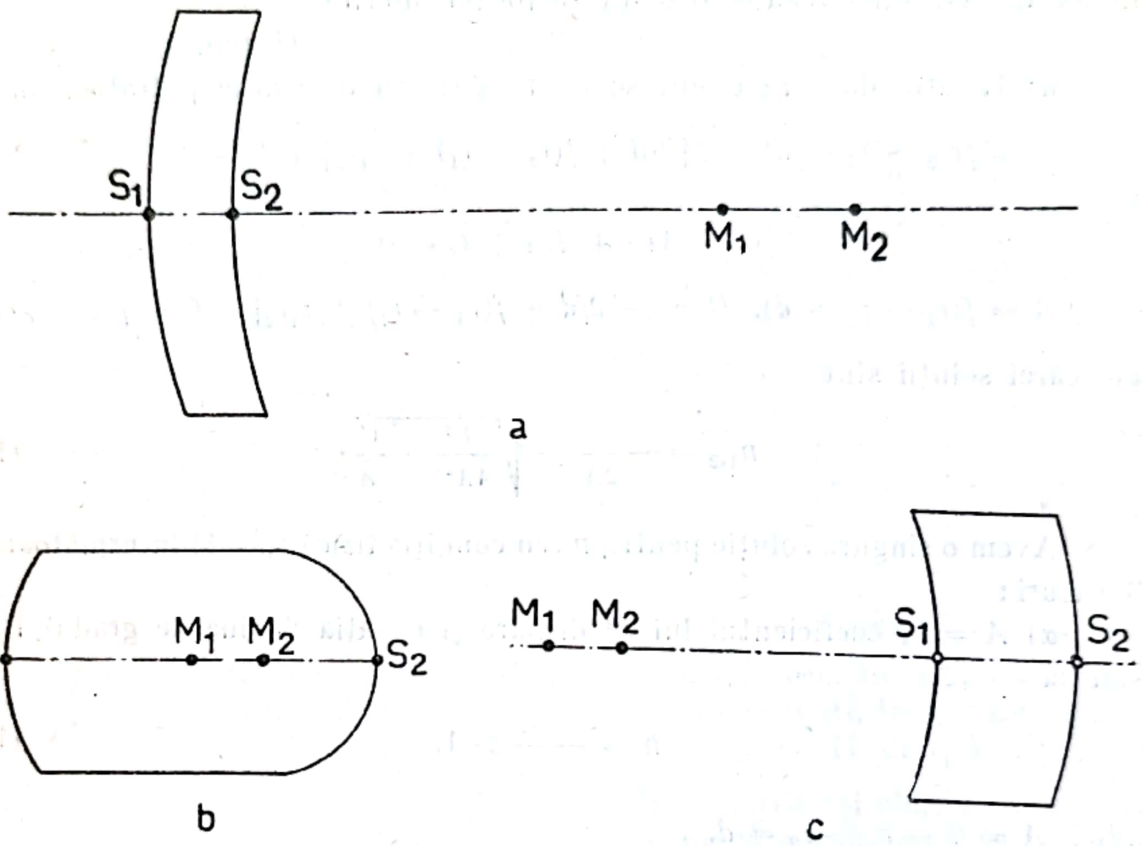


Fig. II.46, R.

Din (4) rezultă de asemenea

$$(d + r_2) - r_1 = M_1M_2 = \frac{d}{n_1n_2} < d = S_1S_2,$$

adică $M_1M_2 < S_1S_2$. (8)

Cazul 2), figura II.46, *R*, *b*. Succesiunea punctelor este $S_1M_1M_2S_2$.

Cazul 4), figura II.46, *R*, *c*. Punctul M_2 se află totdeauna în dreapta lui M_1, fiindcă

$$M_1M_2 = r_2 - (r_1 - d) > 0. \qquad (9)$$

De asemenea, $M_1M_2 < S_1S_2$, ca în (8).

(1 punct)

c) Pentru o lentilă plan-convexă r_1 sau r_2 este infinit. De exemplu, presupunînd r_1 infinit, transcriem în prealabil formula distanței focale astfel:

$$f = \frac{nr_2}{(n-1)\left[n\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right) + \frac{d}{r_1}(n-1)\right]} \qquad (10)$$

și trecînd la limita $r_1 \to \infty$, obținem

$$f = \frac{r_2}{1-n}. \tag{11}$$

Relația dintre f și n fiind univocă, pentru fiecare lungime de undă (sau indice de refracție) rezultă o distanță focală diferită.

(1 punct)

d) Relația dată în enunț se poate scrie ca o ecuație pătratică în n:

$$n^2 f(r_2 - r_1 + d) - n[2fd + f(r_2 - r_1) + r_1 r_2] + fd = 0 \tag{12}$$

sau

$$An^2 + Bn + C = 0,$$

$$A = f(r_2 - r_1 + d),\ B = -[2fd + f(r_2 - r_1) + r_1 r_2],\quad C = fd, \tag{13}$$

ale cărei soluții sînt

$$n_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}}. \tag{14}$$

Avem o singură soluție pentru n (cu condiția fizică $n > 1$) în următoarele 3 cazuri:

α) $A = 0$, coeficientul lui n^2 dispare și ecuația devine de gradul I cu soluția

$$n = -\frac{C}{B} > 1, \tag{15}$$

adică $A = 0 \to r_1 - r_2 = d$,

$$-\frac{C}{B} = \frac{fd}{f(r_2 - r_1) + 2fd + r_1 r_2} = \frac{fd}{fd + r_1 r_2} > 1. \tag{16}$$

β) Discriminant nul, rădăcini confundate:

$$B^2 = 4AC, \qquad n = -\frac{B}{2A} > 1,$$

adică

$$[f(r_2 - r_1) + r_1 r_2]^2 + 4fdr_1 r_2 = 0 \tag{17}$$

și

$$\frac{f(2d + r_2 - r_1) + r_1 r_2}{2f(d + r_2 - r_1)} > 1.$$

γ) $B = 0$, $n^2 = -\frac{C}{A} > 1$,

adică

$$f(r_2 - r_1 + 2d) + r_1 r_2 = 0 \text{ și } \frac{-d}{r_2 - r_1 + d} > 1. \tag{18}$$

(2 puncte)

(Total pentru problema 2: 10 puncte).

Scanned with OKEN Scanner

Problema 3. *a)* Energia ionului este dată de formula

$$eU = \frac{1}{2} mv^2, \tag{1}$$

unde U este tensiunea de accelerare iar e — sarcina unui ion.

Prin urmare, rezultă $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$, (2)

unde v este viteza și m masa unui ion.

(1 punct)

Asupra unui ion care se mișcă cu viteza v într-un cîmp magnetic omogen $\vec{B}$ acționează forța Lorentz $\vec{F}$. Cum din condițiile puse în problemă $\vec{v}$ este totdeauna perpendicular pe $\vec{B}$, avem $F = evB$ și ionul se mișcă pe un cerc. Raza cercului se obține din legea a doua a dinamicii :

$$F = evB = ma = \frac{mv^2}{R},$$

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}. \tag{3}$$

(1 punct)

b) 1. Traiectoriile ionilor constau din arcuri de cerc în regiunea cîmpului magnetic și din linii drepte tangente la astfel de arcuri, în afara cîmpului.

(1 punct)

2. Cum traiectoriile ionilor trebuie să fie simetrice și cîmpul acționează în vecinătatea mediatoarei, rezultă că în regiunea mediatoarei traiectoriile sînt circulare, taie mediatoarea (axa de simetrie) sub un unghi drept și deci au centrele lor de curbură pe axă.

(1 punct)

3. Ținînd seama de sensul cîmpului magnetic, traiectoriile convergente ale ionilor trebuie să fie situate deasupra segmentului QA, deci cîmpul este deasupra acestui segment și are frontiere simetrice.

(1 punct)

c) Ducem cercuri de rază R cu centrele pe mediatoarea segmentului QA. Din punctele Q și A ducem drepte tangente la aceste cercuri. Punctele de intersecție dau frontierele cîmpului magnetic (fig. II.47, *R*). Considerăm separat cazurile $R < a$, $R = a$ și $R > a$.

(1 + 1 + 1 = 3 puncte)

d) Alegînd axele ca în figura II.48, *R*, considerăm traiectoria unui ion și pe această traiectorie punctul $P(x, y)$ al frontierei cîmpului. Cum AP este tangent la cerc și centrul acestuia este pe axa Oy, avem

$$x = R \sin \alpha, \quad y = (a - x) \operatorname{tg} \alpha \tag{4}$$

sau în coordonate polare : $r \cos \theta + R \sin \theta = a$. (5)

(1 punct)

Scanned with OKEN Scanner

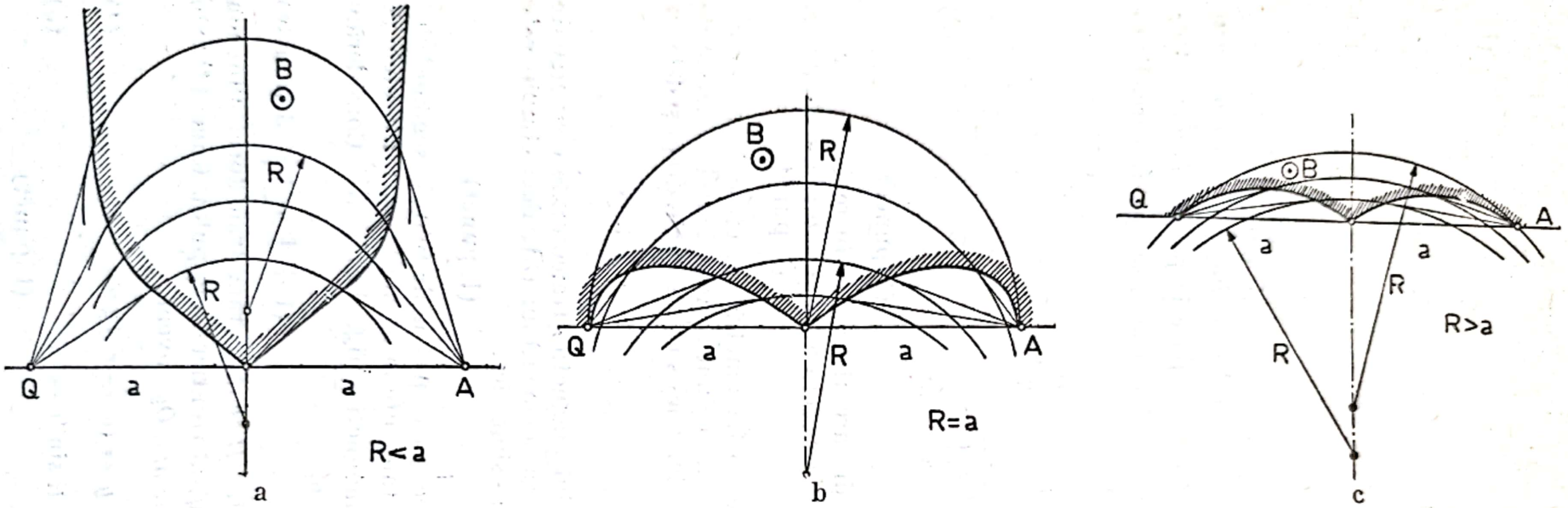


Fig. II.47, R.

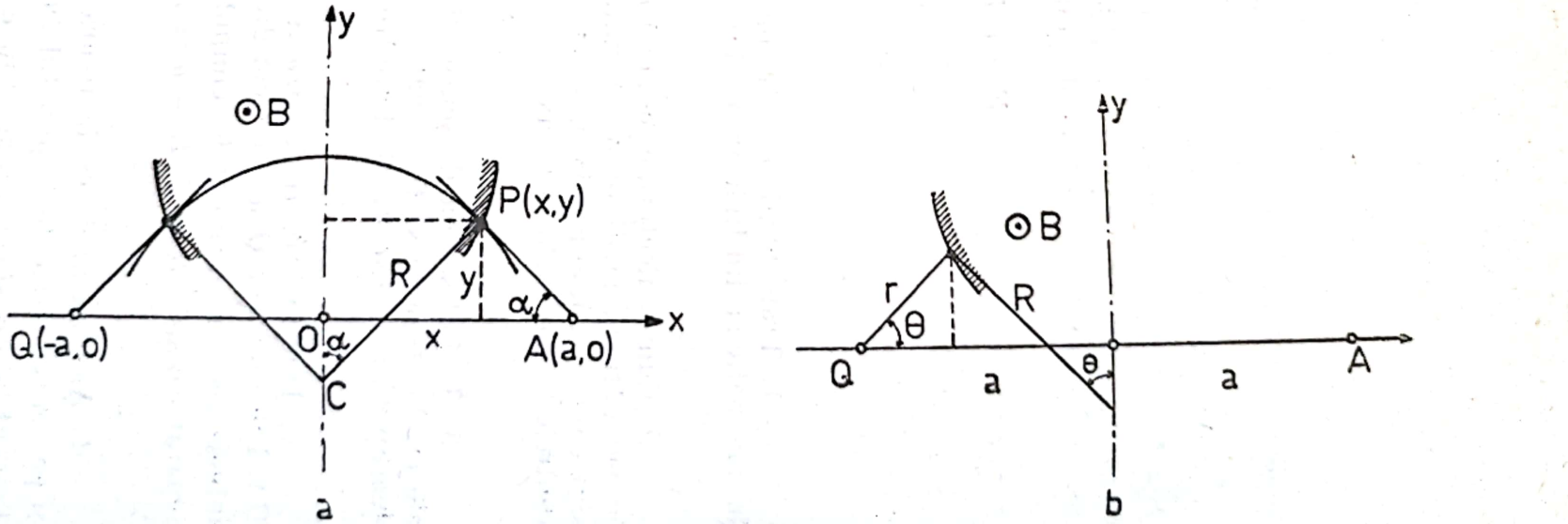


Fig. II.48, R.

Eliminînd pe α, respectiv rezolvînd în raport cu r, găsim ecuația explicită :

$$y = \frac{(a - x)x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \tag{6}$$

$$r = \frac{a}{\cos \theta} - R \operatorname{tg} \theta. \tag{7}$$

(1 punct)

(Total pentru problema 3 : 10 puncte).

Lucrarea experimentală. *a) Considerații generale.* Pentru a evita supraîncărcarea dispozitivului semiconductor, trebuie urmărit ca în procesul măsurătorilor puterea dezvoltată pe dispozitivul semiconductor, deci produsul dintre tensiune și curent, să nu depășească puterea admisibilă dată de 250 mW.

Pentru a obține caracteristica curent-tensiune pot fi folosite două scheme de conexiune (fig. II.49, *R*, *a* și *b*).

Caracteristica completă este reprezentată în figura II.50, *R*.

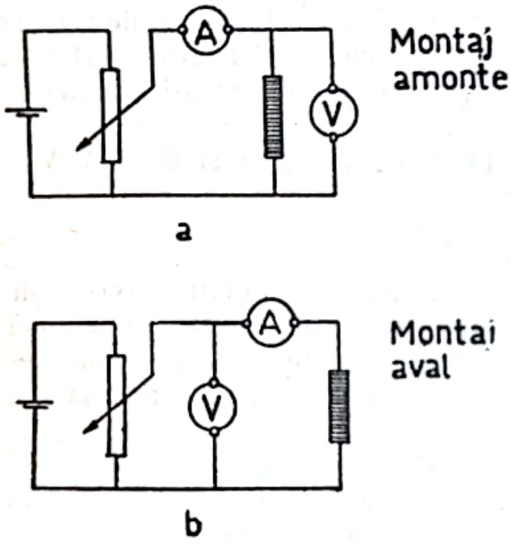


Fig. II.49, R.

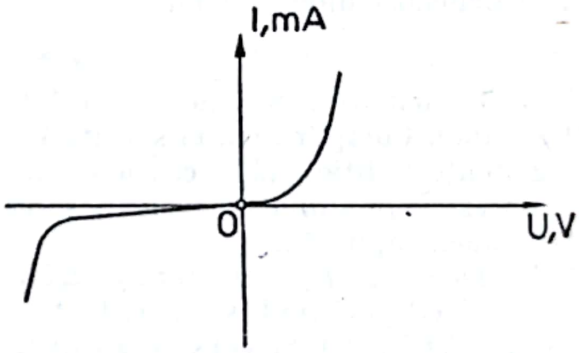


Fig. II.50, R.

Erorile sistematice provin în primul rînd de la aparatele de măsură. Folosind montajul *amonte*, ampermetrul măsoară și curentul care trece prin voltmetru, deci trebuie corectată intensitatea curentului. În montajul *aval* voltmetrul măsoară și căderea de tensiune de pe ampermetru, deci trebuie corectată tensiunea. Aceste corecții se fac ținînd seama de rezistențele interne indicate ale aparatelor, pentru domeniile de măsură folosite.

O altă eroare sistematică provine de la creșterea necontrolată a temperaturii dispozitivului, cînd crește conductivitatea.

b) Rezistența dinamică (internă) este dată de raportul $R_i = \Delta U/\Delta I$, unde variațiile ΔU și ΔI trebuie să fie mici și luate în vecinătatea unui anumit curent sau tensiune ; în cazul nostru pentru curentul de 25 mA. Rezistența dinamică se calculează pentru ambele sensuri ale curentului.

Rezultatele pentru dispozitivul dat sînt considerate corecte dacă se încadrează în limitele de mai jos :

în sensul de blocare :	10 Ω ± 50%,
în sensul direct :	1 Ω ± 50%.

Scanned with OKEN Scanner

c) Schema completă include potențiometrul și cele două aparate de măsură folosite ca voltmetre (fig. II.51, *R*).

Graficul funcției $U_2 = f(U_1)$ este de același tip pentru ambele polarități, numai valorile absolute diferă (fig. II.52, *R*).

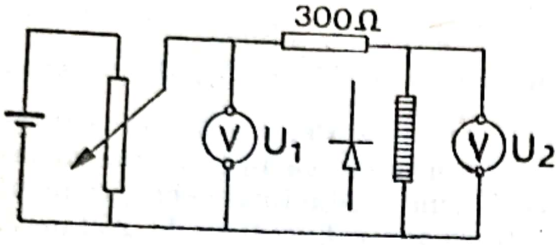


Fig. II.51, R.

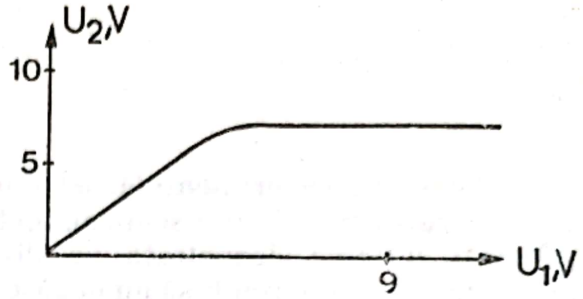


Fig. II.52, R.

Datorită condiției cerute ca tensiunea de ieșire U_2 să fie cît mai mare posibil, trebuie exclusă conectarea dispozitivului în sensul direct (de trecere).

Comentarii. După ce se depășește o anumită valoare a tensiunii de intrare U_1, tensiunea de ieșire U_2 crește neesențial deoarece curentul I crește puternic (străpungerea diodei) odată cu creșterea lui U_1 și odată cu el crește și căderea de tensiune pe rezistența serie adițională.

d) Se măsoară tensiunea de ieșire U_2 pentru $U_1 = 7$ V și $U_1 = 9$ V și se calculează diferența lor ΔU_2:

$$\Delta U_2 = 0{,}1 \text{ V} \pm 50\%.$$

Comentarii : Schema reprezintă un montaj potențiometric (divizor de tensiune). Comportarea ei specifică este determinată de deosebirea celor două rezistențe (adițională și cea a semiconductorului). Rezistența semiconductorului este mult mai mică decît a rezistorului adițional și variază neliniar cu tensiunea aplicată.

Deoarece $R_i \ll R$, rezultă $\Delta U_2 < \Delta U_1$, pentru $U_1 > U_2$.

e) Dispozitivul semiconductor este o diodă Zener (cu caracteristica din fig. II.53, *R*). Se consideră corect și răspunsul : diodă sau redresor.

Montajul poate fi folosit ca stabilizator de tensiune.

Baremul

Tema a)

	Punctaj
— Considerații corecte pentru evitarea supraîncărcării	1
— Schema corectă de conexiune, inclusiv potențiometrul și cele două aparate de măsură	1
— Montajul realizat corect, inclusiv potențiometrul	1
— Rezultatele măsurătorilor tabelate și caracteristica completă (în ambele sensuri) reprezentată	2
— Discuția erorilor sistematice	1
Total	6

Tema b)

— Formula pentru calculul rezistenței dinamice $R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I}$	1
— Rezistența dinamică corectă în sensul direct $\pm 50\%$	1
— Rezistența dinamică corectă în sensul invers (de blocare) $\pm 50\%$	1
Total	3

Scanned with OKEN Scanner

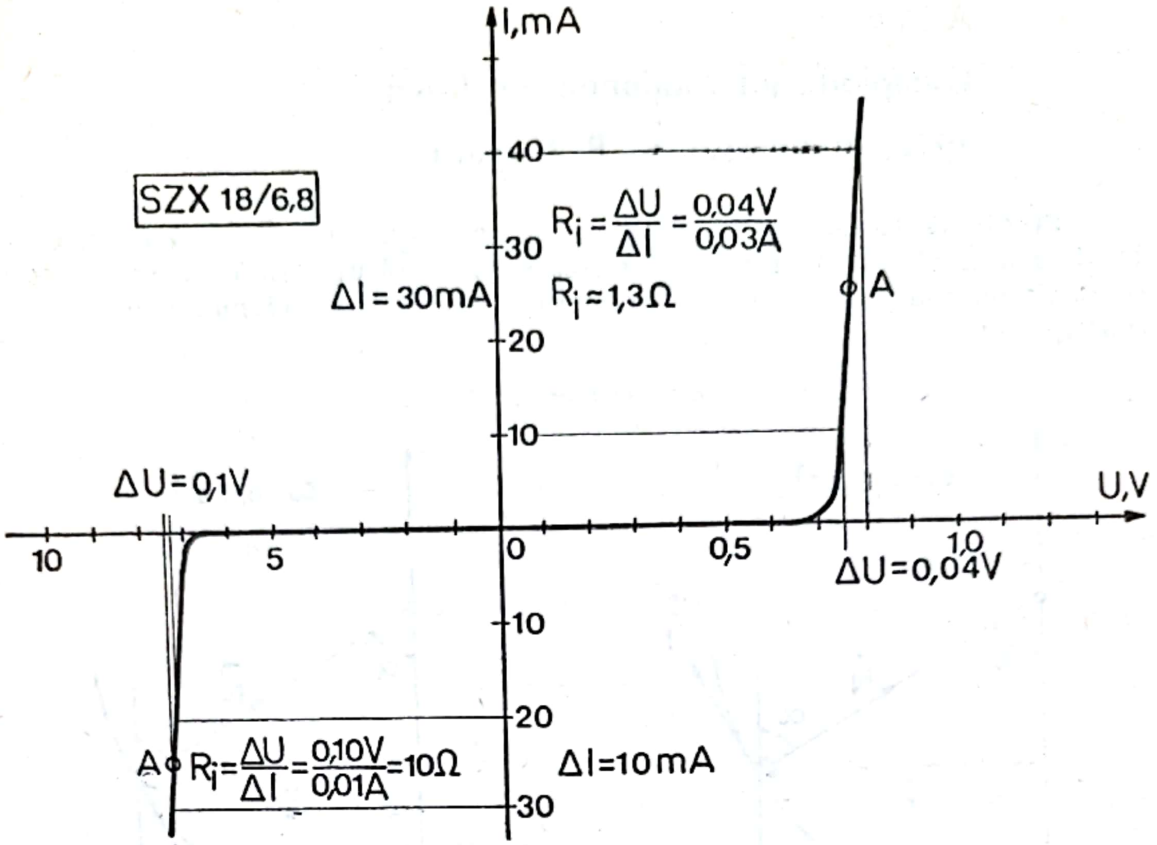


Fig. II.53, R.

Tema c)

— Montaj corect, inclusiv potenţiometrul		1
— Rezultatele sub formă de tabel, corect		2
— Reprezentarea grafică a funcţiei $U_2 = f(U_1)$		1
— Comentarii corecte ale rezultatului		1
	Total	5

Tema d)

— Valoarea corectă a lui ΔU_2 în limitele $\pm 50\%$		1
— Justificarea corectă a raportului $\Delta U_1/\Delta U_2$		2
	Total	3

Tema e)

— Desemnarea ca diodă Zener, diodă sau redresor		1
— Menţionarea ca stabilizator de tensiune		2
	Total	3
Total lucrare practică		20

Observaţie. În efectuarea lucrării experimentale s-a pus un accent deosebit pe îndemînarea de a folosi corect aparatele. Astfel pentru arderea diodei se scădeau 2 puncte, iar pentru stricarea unui aparat de măsură se scădeau 5 puncte.

Scanned with OKEN Scanner

A IX-a

Olimpiadă internaţională de fizică

1976, Budapesta, R. P. Ungară

Problema 1. Corpul se mişcă pe un cerc orizontal cu raza $R \sin \alpha$ (fig. II.54, *R*). În starea staţionară de mişcare circulară uniformă nu există forţe tangenţiale, aşa cum nu există acceleraţie tangenţială, ci numai acceleraţia centripetă :

$$a = \omega^2 r = \omega^2 R \sin \alpha. \tag{1}$$

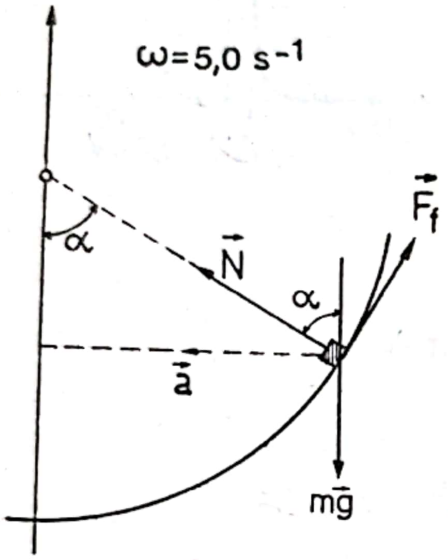


Fig. II.54, R.

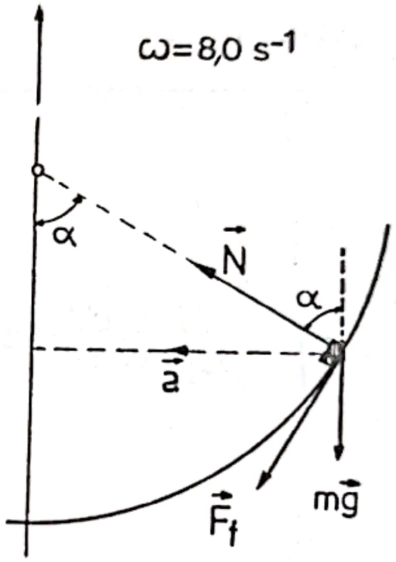


Fig. II.55, R.

Asupra corpului acţionează forţa de greutate $m\vec{g}$, exercitată de Pământ prin atracţia gravitaţională, iar la contactul corpului cu sfera acţionează două forţe : reacţiunea normală $\vec{N}$ a sferei (datorită deformării elastice) şi forţa de frecare $\vec{F}_f$. Rezultanta celor trei forţe trebuie să dea forţa centripetă, conform legii fundamentale $\vec{F} = m\vec{a}$,

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}, \qquad a = \omega^2 R \sin \alpha. \tag{2}$$

Pentru a vedea sensul forţei de frecare, proiectăm ecuaţia (2) pe tangenta la sferă, în planul desenului :

$$mg \sin \alpha - F_f = m\omega^2 R \sin \alpha \cos \alpha, \tag{3}$$

$$F_f = m \sin \alpha \, (g - \omega^2 R \cos \alpha). \tag{4}$$

Sensul forţei de frecare este dat de semnul diferenţei $g - \omega^2 R \cos \alpha$.

În primul caz,

$$g - \omega^2 R \cos \alpha = 10 - (5{,}0)^2 \cdot 0{,}50 \cdot \frac{1}{2} = 3{,}75 > 0, \tag{5}$$

deci forţa de frecare lucrează în sus ca în figura II.54, *R*.

Scanned with OKEN Scanner

În al doilea caz,

$$10 - (8{,}0)^2 \cdot 0{,}50 \cdot \frac{1}{2} = -6{,}0 < 0, \tag{6}$$

deci forța de frecare lucrează în jos ca în figura II.55, *R*

a) Revenind la primul caz și alegînd direcțiile orizontală și verticală, avem pentru proiecțiile respective :

$$\begin{aligned} mg - N\cos\alpha - F_f \sin\alpha &= 0, \\ N\sin\alpha - F_f\cos\alpha &= m\omega^2 R\sin\alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

Soluția acestor ecuații este :

$$\begin{aligned} N &= mg\left(\cos\alpha + \frac{1}{g}\,\omega^2 R\,\sin^2\alpha\right), \\ F_f &= mg\sin\alpha\left(1 - \frac{1}{g}\,\omega^2 R\cos\alpha\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Nu va avea loc lunecarea în jos dacă

$$F_f < \mu N,\ \mu > \frac{F_f}{N} = \mu_a. \tag{9}$$

$$\mu_a = \sin\alpha\,\frac{1 - \omega^2 R\cos\alpha/g}{\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha/g} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1 - 5{,}0^2\,\mathrm{s}^{-2}\cdot 0{,}50\ \mathrm{m}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1/10)\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m}}{\frac{1}{2} + 5{,}0^2\,\mathrm{s}^{-2}0{,}50\ \mathrm{m}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{10}\,\frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}}} = \frac{3\sqrt{3}}{23} = 0{,}226,\ (\alpha = 60^\circ). \tag{10}$$

Nu este necesară vreo condiție împotriva lunecării în sus, deoarece există pericol de lunecare numai în jos.

b) În al doilea caz (6) este posibilă doar lunecarea în sus și forța de frecare este orientată în jos ca în figura II.55, *R*.

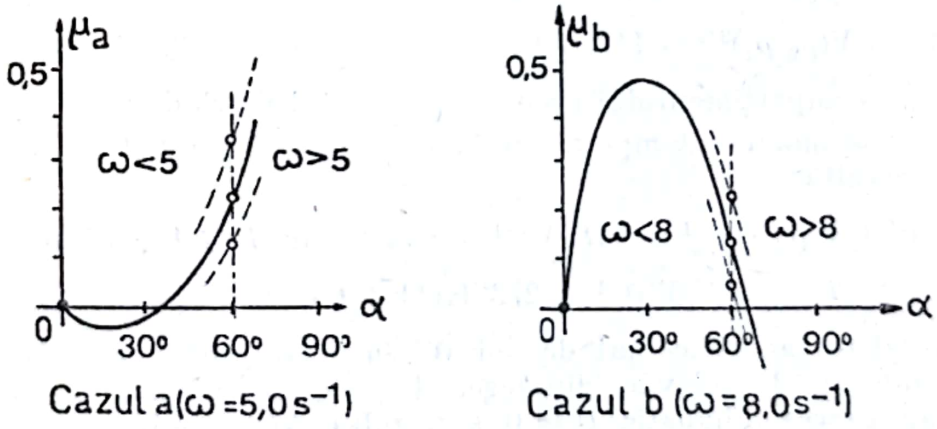


Fig. II.56, R.

Un calcul analog ne dă

$$\mu_b = \sin\alpha\,\frac{\omega^2 R\cos\alpha/g - 1}{\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha/g} = \frac{3\sqrt{3}}{29} = 0{,}179. \tag{11}$$

c) Pentru a analiza stabilitatea stării, să reprezentăm coeficienții de frecare minimi necesari calculați mai sus (10, 11) în funcție de unghiul α (fig. II.56, *R*).

Scanned with OKEN Scanner

Concluziile pot fi trase din aceste grafice.

Cazul a). Dacă corpul este aşezat ceva mai jos ($\alpha < 60°$), coeficientul de frecare minim necesar este mai mic decît 0,226, deci corpul va rămîne acolo (atunci forţa de frecare $F_f < 0{,}226$ N); dacă el este aşezat ceva mai sus ($\alpha > 60°$), $\mu_{necesar} > 0{,}226$, deci corpul va luneca în jos.

Dacă viteza unghiulară este mai mică decît 5,0 s^{-1}, $\mu_{necesar} > 0{,}226$ şi corpul va luneca în jos; dacă $\omega > 5{,}0\ s^{-1}$, $\mu_{necesar} < 0{,}226$ şi corpul nu se va deplasa.

Cazul b) Analog ca în cazul *a)* avem : Dacă corpul este aşezat ceva mai jos ($\alpha < 60°$), el va luneca în sus; dacă este aşezat ceva mai sus ($\alpha > 60°$), el va rămîne acolo.

Dacă viteza unghiulară scade ($\omega < 8{,}0\ s^{-1}$), corpul nu se va deplasa; dacă viteza unghiulară creşte ($\omega > 8{,}0\ s^{-1}$), corpul va luneca în sus.

Problema 2. Iniţial presiunea din partea stîngă este ($V = Sl$) :

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu}\frac{RT}{V} = \frac{12{,}0\cdot10^{-3}\ \text{kg}}{4{,}0\ \text{kg/kmol}}\ \frac{8{,}3\cdot10^{3}(\text{J/kmol}\cdot\text{K})\cdot 273\ \text{K}}{1{,}00\cdot10^{-2}\text{m}^2\cdot 1{,}12\ \text{m}} = 6{,}0\cdot10^{5}\ \text{N/m}^2, \qquad (1)$$

iar în partea dreaptă :

$$p_2 = \frac{m_2}{m_1}p_1 = \frac{2{,}00}{12{,}0}\cdot 6{,}0\cdot10^{5}\ \text{N/m}^2 = 1{,}00\cdot10^{5}\ \text{N/m}^2; \qquad (2)$$

Împingînd pistonul spre stînga, gazul din compartimentul drept se comprimă adiabatic. Supapa se va deschide numai atunci cînd presiunea atinge valoarea p_1 (1).

Aplicăm legea lui Poisson pentru transformarea adiabatică :

$$pV^{\gamma} = \text{const.},\ \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i} = \frac{5}{3}, \qquad (3)$$

deci $p_2V^{5/3} = p_1V'^{5/3}$, de unde rezultă :

$$V' = V(p_2/p_1)^{3/5} = 11{,}2\cdot10^{-3}\ \text{m}^3\ (1{,}00/6{,}00)^{3/5} = 3{,}8\cdot10^{-3}\ \text{m}^3 \qquad (4)$$

— volumul compartimentului drept în momentul deschiderii supapei.

În acest moment temperatura în dreapta a devenit T', şi anume din legea (3) rezultă

$$pV^{\gamma} = pV\cdot V^{\gamma-1} = \nu RTV^{\gamma-1} = \text{const. sau } TV^{\gamma-1} = \text{const.},$$

$$T' = T(V/V')^{\gamma-1} = 273\ \text{K}(11{,}2/3{,}8)^{2/3} = 560\ \text{K}. \qquad (5)$$

Lucrul mecanic efectuat de noi W' în acest proces duce la creşterea energiei interne. În adevăr, din legea I a termodinamicii $Q = \Delta U + W$, pentru un proces adiabatic $Q = 0$ şi rezultă $\Delta U = -W = +W'$, unde $W = -W'$ este lucrul mecanic efectuat de gaz. Prin urmare, lucrul mecanic efectuat de noi W' este

$$W' = -W = \Delta U = m_2c_v\Delta T = 2{,}00\ \text{g}\cdot 3{,}15\ \frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}}\ (560 - 273)\ \text{K} =$$

$$= 1{,}80\ \text{kJ}. \qquad (6)$$

Am folosit formula variaţiei energiei interne a unui gaz ideal în orice transformare : $\Delta U = mc_v\Delta T = \nu C_v\Delta T$. *Energia internă a unui gaz ideal este funcţie numai de temperatură (legea lui Joule).*

Scanned with OKEN Scanner

Odată supapa deschisă și pistonul menținut pe loc, se face un schimb de căldură între gazele din compartimente și la echilibru termodinamic temperatura va fi dată de ecuația :

$$m_2 c_v (T' - T''') = m_1 c_v (T''' - T),$$

$$T''' = \frac{m_1 T + m_2 T'}{m_1 + m_2} = \frac{12{,}0 \cdot 273 + 2{,}00 \cdot 560}{14{,}0} = 314 \text{ K}. \qquad (7)$$

Acum urmează a doua comprimare adiabatică a întregului gaz (supapa, odată deschisă, rămîne acum deschisă tot timpul) de la volumul

$$V + V' = 11{,}2 + 3{,}8 = 15{,}0 \text{ dm}^3 \qquad (8)$$

la temperatura $T''' = 314$ K, pînă la volumul final $V = 11{,}2$ dm³ și temperatura finală T'''' :

$$T'''' = T''' \left(\frac{V+V'}{V}\right)^{\gamma-1} = 314 \text{ K} \left(\frac{15{,}0}{11{,}2}\right)^{2/3} = 382 \text{ K}. \qquad (9)$$

Lucrul mecanic efectuat mărește energia internă a gazului astfel

$$W' = mc_v(T'''' - T''') = 14{,}0 \text{ g} \cdot 3{,}15 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}} (382 - 314) \text{ K} = 3{,}00 \text{ kJ}. \qquad (10)$$

Lucrul mecanic total :

$$W_t' = 1{,}80 + 3{,}00 = 4{,}80 \text{ kJ}. \qquad (11)$$

Trebuie scăzut însă de aici lucrul mecanic efectuat de presiunea exterioară :

$$W = HS \cdot l = 1{,}00 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1{,}00 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot 1{,}12 \text{ m} = 1{,}12 \text{ kJ}. \qquad (12)$$

Prin urmare, rezultatul final este următorul :

$$W_{ef} = 4{,}80 - 1{,}12 = 3{,}68 \text{ kJ}. \qquad (13)$$

Problema 3. *Metoda I.* Se cufundă sfera de sticlă într-un lichid al cărui indice de refracție este egal cu al materialului din care este confecționată sfera. Apoi se determină poziția dreptei ce unește centrele celor două sfere prin intermediul imaginilor rotunde ale bulei și se continuă calculul aplicînd legile lentilelor groase.

Metoda II. Se cufundă sfera de sticlă într-un lichid al cărui indice de refracție este egal cu al materialului din care este confecționată sfera. Se explorează sistemul optic astfel format cu ajutorul unui fascicul cilindric de lumină monocromatică. Pe un ecran E situat în spatele sferei va apare o zonă de umbră de formă circulară cu diametrul egal cu cel al bulei (fig. II.51, R).

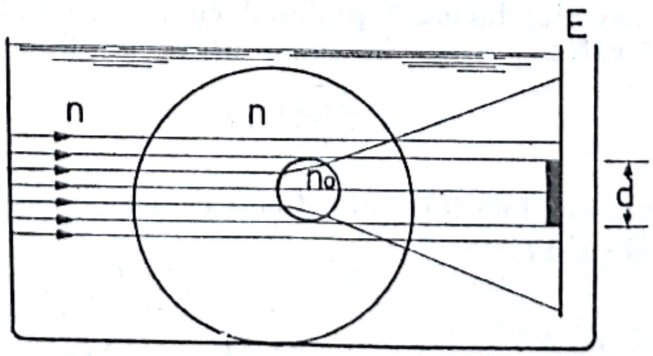


Fig. II.57, R.

Scanned with OKEN Scanner

(Ţinînd seama de faptul că $n_0 < n$, bula joacă aici rolul unei lentile sferice divergente.)

Lucrarea experimentală. Problema poate fi rezolvată cu ajutorul curbei de încălzire a substanţei cristaline X şi a lichidului L. Curba de încălzire a lichidului este reprezentată în figura II. 58 R prin linie întreruptă.

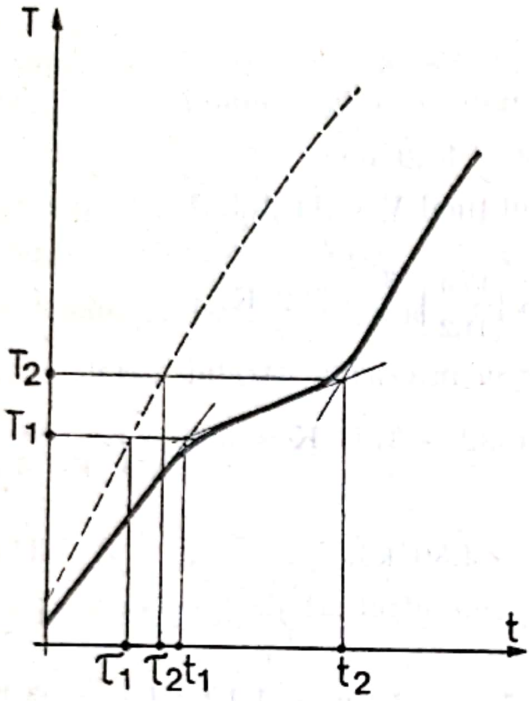


Fig. II.58 R.

Pentru ridicarea curbei de încălzire a substanţei cristaline este important de încălzit această substanţă *împreună* cu lichidul dat; lichidul asigură omogenitatea temperaturii în eprubetă. În figura II.58, R linia plină reprezintă curba de încălzire a substanţei cristaline cu lichidul.

Partea centrală, aproape orizontală, a acestei curbe arată că substanţa cristalină se topeşte în acest interval de timp. Procesul de topire poate fi sesizat cu ajutorul agitatorului.

Prin examinarea acestor două curbe se poate determina căldura latentă de topire, temperatura de topire şi căldura specifică a substanţei X.

a) Determinarea căldurii latente de topire. Din curba de încălzire a lichidului se poate determina căldura absorbită de lichidul din eprubetă în unitatea de timp. Din curba plină se poate vedea că substanţa X încălzită în lichid se topeşte în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ şi că temperatura în acest timp creşte în eprubetă cu $\Delta T = T_2 - T_1$. Conform curbei întrerupte, pentru creşterea temperaturii lichidului de la T_1 la T_2 este necesar intervalul de timp $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$.

În modul acesta, încălzitorul calorimetrului produce următoarea cantitate de căldură în unitatea de timp :

$$q = \frac{m_0 c_0 \Delta T}{\Delta\tau}, \quad (m_0,\ c_0 \text{ — masa şi căldura specifică a lichidului}), \qquad (1)$$

în intervalul de temperatură $(T_1,\ T_2)$. Neglijăm capacitatea calorică a calorimetrului.

În timpul încălzirii împreună a substanţei cristaline şi a lichidului, încălzitorul calorimetrului lucrează probabil cu aceeaşi putere, astfel încît, căldura transferată către eprubetă în timpul procesului de topire este

$$q\Delta t = \frac{m_0 c_0 \Delta T}{\Delta\tau}\Delta t. \qquad (2)$$

Această căldură este folosită pentru topirea substanţei cristaline şi pentru încălzirea lichidului cu ΔT.

Astfel avem

$$\frac{m_0 c_0 \Delta T}{\Delta\tau}\Delta t = \lambda m + m_0 c_0 \Delta T + mc\Delta T, \qquad (3)$$

Scanned with OKEN Scanner

(m, λ, c — masa, căldura latentă de topire și căldura specifică în stare lichidă a substanței X.)

Din relația (3) se poate deduce căldura latentă de topire λ a substanței necunoscute X, evaluînd sau neglijînd ultimul termen.

b) Determinarea temperaturii de topire. Se poate lua drept temperatură de topire, temperatura corespunzătoare punctului mijlociu al porțiunii lent crescătoare (aproape orizontale) a curbei pline.

c) Determinarea căldurii specifice. Să notăm cu k_l panta curbei întrerupte (a lichidului) sub temperatura de fuziune și cu k_m — panta porțiunii liniare a curbei pline (lichid + substanța X), sub temperatura de fuziune. Cu aceste notații avem : (din constanța puterii debitate de încălzitor) :

$$c_0 m_0 k_l = (m_0 c_0 + mc) k_m, \tag{4}$$

de unde se poate determina căldura specifică necunoscută c a substanței cristaline solide.

Observație. Problema poate fi rezolvată și pe alte căi. De exemplu, prin măsurarea *curbei de răcire.*

Poate fi determinată, de asemenea, și căldura specifică a substanței X în stare lichidă.

Scanned with OKEN Scanner

Anexe

A. PROGRAMA ANALITICĂ

pentru pregătirea participanților la Olimpiadele internaționale de fizică

Introducere

Mărimile fizice și unitățile lor de măsură:

Unitățile fundamentale și unitățile derivate. Sistemul de unități internațional SI și sistemul de unități Gauss.

Măsurarea mărimilor fizice

Erori sistematice și erori statistice. Eroarea aparatului de măsură. Eroarea metodei.

Bazele algebrei vectoriale

Suma și diferența vectorilor. Produsul dintre un scalar și un vector. Produsul scalar și produsul vectorial a doi vectori.

MECANICA

Mecanica punctului material

Cinematica punctului material

Traiectoria, viteza, accelerația. Mișcarea circulară uniformă. Mișcarea oscilatorie armonică.

Dinamica punctului material:

Masa inertă. Relația dintre masa inertă și forță. Impulsul forței și impulsul punctului material (cantitatea de mișcare). Principiile lui Newton. Legile lui Kepler. Masa gravitațională. Accelerația gravitațională. Unitatea materiei. Forța. Compunerea și descompunerea forțelor. Mișcarea unui punct material produsă de o forță. Mișcarea pe un plan înclinat. Forțele în mișcare circulară uniformă. Forța în mișcarea oscilatorie armonică. Tensiuni în fire. Pendulul matematic. Legea lui Newton a atracției gravitaționale universale. Cîmpul gravitațional. Lucrul mecanic. Putere. Conservarea energiei.

Mecanica solidului rigid

Cinematica solidului rigid

Mișcarea de translație și mișcarea de rotație.

Statica solidului rigid

Forțele care acționează asupra corpului. Rezultanta forțelor: a) care acționează pe aceeași direcție, b) care acționează pe direcții diferite. Momentul forței, formula sa. Cuplu de forțe. Rezultanta forțelor care acționează pe direcții paralele. Centrul de greutate. Mecanisme simple. Presiunea, densitatea. Echilibrul solidului rigid.

Dinamica solidului rigid

Forțele care acționează asupra corpului. Frecarea la lunecare și frecarea la rostogolire. Impulsul și energia în mișcarea de translație. Mișcarea de rotație. Momentele de inerție. Legile fundamentale ale mișcării de rotație. Centrul de masă. Comparația dintre mișcarea de translație și mișcarea de rotație a solidului rigid. Pendulul fizic.

Mecanica solidului elastic

Elasticitate la întindere (la tracțiune). Tensiuni și deformații. Ciocnirea elastică a două sfere.

Scanned with OKEN Scanner

HIDROMECANICA

Hidrostatica

Suprafaţa liberă a lichidului. Acţiunea forţelor interne. Presiunea hidrostatică. Vase comunicante. Legea lui Arhimede. Statica corpurilor care plutesc.

Hidromecanica

Mişcarea laminară şi mişcarea turbulentă a fluidelor. Legea lui Bernoulli şi consecinţele ei. Energia fluidului în mişcare. Mişcarea unui solid rigid într-un fluid.

Proprietăţile moleculare ale fluidelor

Compresibilitatea fluidelor. Tensiunea superficială. Efectele capilare în tuburi subţiri.

AERODINAMICA

Aerostatica

Presiunea gazelor; presiunea aerostatică. Legile lui Boyle-Mariotte, Gay-Lussac şi Charles. Presiunea atmosferică şi dependenţa sa de altitudine. Aparatele de măsură a presiunii (manometre). Legea lui Arhimede pentru gaze. Lucrul mecanic efectuat de un gaz. Legea lui Avogadro. Legea lui Dalton. Ecuaţia de stare a lui Clapeyron.

Aerodinamica

Convecţia. Frecarea în mişcarea în aer.

OSCILAŢII şi UNDE

Mişcarea oscilatorie

Compunerea oscilaţiilor. Oscilaţii forţate. Rezonanţa.

Generarea şi proprietăţile oscilaţiilor

Generarea undelor progresive. Interferenţa undelor. Reflexia undelor. Generarea undelor staţionare, undelor plane şi a undelor în spaţiul tridimensional. Principiul lui Huygens. Reflexia undelor plane.

Acustica muzicală şi acustica fizică

Înălţimea absolută a tonurilor. Interferenţa sunetelor. Sursele de sunet. Rezonanţa în acustică.

CĂLDURA

Termometrie

Temperatura şi scările sale. Ecuaţia de stare a unui sistem. Dilatarea termică a solidelor, lichidelor şi gazelor. Relaţia dintre temperatură şi energia cinetică a moleculelor.

Calorimetrie:

Calorie. Căldura specifică. Măsurarea căldurii. Sursele de căldură şi răspîndirea lor.

Termodinamica gazelor

Primul principiu al termodinamicii. Energia internă a unui gaz. Transformările: izobară, izocoră, izotermă şi adiabatică ale unui gaz. Al doilea principiu al termodinamicii.

Sistem cu un singur component

Topirea, solidificarea, evaporarea, fierberea, condensarea. Diagrama fazelor. Umiditatea.

ELECTRICITATE şi MAGNETISM

Electrostatica

Sarcina electrică. Legea lui Coulomb. Cîmpul electric. Intensitatea cîmpului electric. Teorema lui Gauss. Potenţialul electrostatic. Capacitatea conductorilor. Energia electrostatică a conductorului încărcat. Condensatoare şi conectarea lor. Dielectrici.

Scanned with OKEN Scanner

Curent electric

Curentul de conducţie şi curentul de deplasare.

Cîmpul magnetic al curentului electric

Legea lui Biot-Savart. Cîmpul magnetic produs de un curent : a) într-un conductor rectiliniu, b) într-un conductor circular (spiră), c) într-un solenoid. Influenţa cîmpului magnetic asupra curentului electric. Interacţiunea dintre doi conductori rectilinii străbătuţi de curent. Forţa Lorentz.

Magneţi

Cîmpul magnetic şi intensitatea sa. Energia cîmpului magnetic. Susceptibilitatea magnetică a feromagneticelor.

Curentul continuu

Legea lui Ohm. Energia şi puterea curentului electric, dependenţa de rezistenţă, de dimensiunile conductorului, de tipul materialului şi de starea sa fizică. Legile lui Kirchhoff. Legea lui Joule. Termoelectricitatea.

Curentul alternativ

Inducţia electromagnetică, autoinducţia, inducţia mutuală. Curentul alternativ. Impedanţa. Puterea în curent alternativ.

Curentul electric în conductoare de speţa a doua

Legile lui Faraday. Sarcina ionilor monovalenţi. Electroliza. Polarizarea.

Curentul electric în gaze şi în vid

Descărcări : menţinute şi independente. Descărcări în gaze rarefiate. Razele catodice. Emisia termoelectrică. Tuburile electronice.

Semiconductori

Electroni şi goluri în semiconductori. Termistori. Redresori. Amplificarea. Efectul fotoelectric.

Maşini electrice

Generatoare. Motoare. Transformatoare. Transmiterea energiei electrice la distanţă.

Undele electromagnetice

Cîmpul electromagnetic. Oscilaţii electromagnetice. Generarea undelor electromagnetice. Dipolul.

Radiaţia electromagnetică

Radiaţia termică. Variabilele care descriu radiaţia electromagnetică. Legile radiaţiei. Luminescenţa. Efectul fotoelectric. Radiaţia infraroşie şi ultravioletă.

OPTICA

Propagarea luminii

Viteza luminii. Fluxul luminos. Fotometrie.

Optica geometrică

Reflexia luminii. Oglinda plană, oglinda sferică. Aberaţiile oglinzilor. Refracţia luminii. Indicele de refracţie. Refracţia internă totală. Propagarea luminii prin lame plan-paralele. Prisma. Dispersia. Refracţia printr-o suprafaţă sferică. Lentile subţiri.
Aberaţiile lentilelor. Aparate optice.

Optica fizică

Interferenţa luminii. Difracţia luminii, distorsiuni. Polarizarea luminii prin refracţie şi prin reflexie.

Scanned with OKEN Scanner

Optica fiziologică

Ochiul și imperfecțiunile sale. Proprietatea stereoscopică a vederii.

FIZICA ATOMICĂ

Atomul

Modelul atomului de hidrogen. Nivelele de energie ale atomului de hidrogen. Orbitele eliptice. Momentul magnetic.

Învelișul atomic (electronic)

Proprietățile chimice ale atomilor. Spectrul optic. Spectrul razelor X (Roentgen). Explicarea periodicității în proprietățile elementelor chimice.

Nucleul atomic

Radioactivitatea spontană. Constituenții nucleului. Reacțiile nucleare.

Scanned with OKEN Scanner

B. EXTRASE DIN STATUTUL OLIMPIADEI INTERNAȚIONALE DE FIZICĂ

§ 4. Fiecare țară participantă trimite o echipă compusă din elevi ai școlilor medii de cultură generală și tehnică, adică ai școlilor care n-au un caracter de învățământ tehnic superior; vîrsta participanților la deschiderea competiției nu trebuie să fie mai mare de 20 ani. Numărul membrilor unei echipe — 5 oameni. Pe lîngă fiecare echipă sînt invitați și doi însoțitori, din care unul este desemnat conducătorul delegației și membru al comisiei internaționale, cu dreptul de vot, iar celălalt — conducător pedagogic, care poate participa la ședința Comisiei internaționale cu drept de vot consultativ.

§ 7. Concursul durează două jumătăți de zile lucrătoare diferite. În timpul jumătății primei zilei, participanții la concurs vor rezolva în scris patru probleme de fizică, în timpul jumătății celei de-a doua zi, vor rezolva o temă experimentală. Timpul afectat pentru rezolvarea problemelor este stabilit în directive.

§ 8. Numărul de puncte pentru notarea problemelor este stabilit de organizatorul concursului. Tema de laborator constă dintr-o analiză teoretică (plan și discuții) și din efectuarea unei experiențe. Fiecare temă sau fiecare parte a temei de laborator este notată cu același număr maxim de puncte, dar trebuie de respectat regula ca numărul maxim de puncte afectat unor anumite teme (părți ale temelor de laborator) să nu fie mai mic de 5. În funcție de numărul de puncte acumulat, cîștigătorii vor primi premii și mențiuni.

Scanned with OKEN Scanner

C. EXTRASE DIN DIRECTIVELE STATUTULUI OLIMPIADEI INTERNAȚIONALE DE FIZICĂ

Aliniatul 2 (la § 7)

Pentru rezolvarea a patru lucrări scrise se acordă 5 ore de timp, pentru rezolvarea problemei de laborator (lucrare experimentală) — se acordă 3—5 ore în funcție de complexitatea acesteia. În rezolvarea problemelor participanții pot folosi tabele logaritmice, tabele de constante fizice, rigla de calcul și instrumente necesare desenului.

Aliniatul 4 (la § 10)

Organizatorul va pregăti pentru întreceri probleme din următoarele capitole ale fizicii.
1 problemă de mecanică (inclusiv oscilații mecanice);
1 problemă de termodinamică;
1 problemă de electricitate și magnetism (inclusiv oscilații electromagnetice).
1 problemă de optică.
1 problemă de laborator.

Capitolul 3 (la § 8)

Criterii de acordare a diplomelor:

Numărul maxim de puncte, obținute în timpul întrecerii — 100%.

Participanții, care obțin mai mult de 90% din numărul maxim de puncte, obțin Premiul I (diplomă).

Participanții care obțin 78—90% din numărul maxim de puncte, obțin Premiul II (diplomă).

Participanții, care obțin 65—77% din numărul maxim de puncte, obțin Premiul III (diplomă).

Participanții, care obțin 50—64% din numărul maxim de puncte, obțin mențiune

Participanții, care obțin mai puțin de 50% din numărul maxim de puncte, obțin diplomă de participare la întreceri.

Notele de mai sus se calculează prin rotunjirea pînă la întreg.

Scanned with OKEN Scanner

Coli de tipar 10,500. B.T. 08.11.1977.
Format 16/70×100, hîrtie scris I A.
70×100/44,1. Tiraj 40 000+80 broșate.
Apărut 1978.

I. P. „Oltenia" Craiova
Str. M. Viteazul, nr. 4
Republica Socialistă România
Plan 6 261/160/1970

Scanned with OKEN Scanner